Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Musterlösungen zur Klausur vom 23.2.1999

Aufgabe 1 (2 + 1 + 1 + 3 + 1 Punkte)

Gegeben sei das Problem der Auswertung der Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zur Lösung des Problems sei der Algorithmus

$$(*) \qquad y_1 := x^2,\ y_2 := 1 + y_1,\ y_3 := 1/y_2,\ y_4 := 1 - y_3$$

gegeben.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Kondition des Problems für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad f'(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$\Longrightarrow C_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \cdot \frac{x\,(1+x^2)}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

b) (1 Punkt) Ist das Problem gut konditioniert? Begründung !

Ja, da $\left|C_f(x)\right| \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ — dies ist eine moderate Schranke.

c) (1 Punkt) Gegeben sei der Eingabewert x, der mit einem relativen Fehler von 5 % behaftet ist. Welcher relativer Fehler ist in der Ausgabe zu erwarten?

$$\left|\frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)}\right| \approx \left|C_f(x)\right| \cdot \left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right| \leq 2 \cdot 0.05 = 0.10 \quad \equiv \quad 10\%$$

d) (3 Punkte) Betrachten Sie den Algorithmus $(*)$. Ist dieser Algorithmus stabil? (Begründung !) Geben Sie gegebenenfalls einen geeigneten Algorithmus an.

Algorithmus $(*)$: Für $|x|$ klein ist $y_3 \approx 1$. Daher tritt bei der Berechnung von y_4 Auslöschung auf, was zu einem instabilen Algorithmus führt. (1 Punkt)

Besserer Algorithmus : $y_1 = x^2$; $y_2 = 1 + y_1$; $y_3 = y_1/y_2$ ist stabil. (2 Punkte)

e) (1 Punkt) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kondition eines Problems und der Stabilität eines Algorithmus' zur Lösung dieses Problems?

Kein Zusammenhang! Die *Kondition* ist eine Eigenschaft des Problems, während die *Stabilität* eine Eigenschaft des Algorithmus' ist. Unbeschadet dessen hilft natürlich auch ein stabiler Algorithmus nicht viel bei einem schlecht konditionierten Problem.

Aufgabe 2 (6 + 4 + 1 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i

t_i	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y_i	4	1	0	1	4

Gesucht ist die Gerade $y(t) = a\,t^2 + b\cos(t) + c\,\sin(t)$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird.

a) (6 Punkte) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem, und geben Sie die zugehörigen Normalgleichungen an.

$$A = \begin{pmatrix} \pi^2 & -1 & 0 \\ \pi^2/4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pi^2/4 & 0 & 1 \\ \pi^2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Das Ausgleichsproblem lautet nun $\|A\,x - b\|_2 \stackrel{!}{=} \min$ (1 Punkt).
Die Normalgleichungen lauten $A^T\,Ax = A^T\,b$ mit

$$A^T\,A = \begin{pmatrix} {}^{17}\!/_8\,\pi^4 & -2\pi^2 & 0 \\ -2\pi^2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T\,b = \begin{pmatrix} {}^{17}\!/_2\,\pi^2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(3 Punkte)}$$

b) (4 Punkte) Lösen Sie die Normalgleichungen mittels LDL^T–Zerlegung. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -16/(17\pi^2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \operatorname{diag}\left({}^{17}\!/_8\,\pi^4\,,\ {}^{19}\!/_{17}\,,\ 2\right)$$

$$L\,y = A^T\,b \quad\Longrightarrow\quad y = \begin{pmatrix} {}^{17}\!/_2\,\pi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad D^{-1}\,y = \begin{pmatrix} 4/\pi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad x = \begin{pmatrix} 4/\pi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkt) Welche Nachteile entstehen im Allgemeinen bei der Lösung des Ausgleichsproblems über die Normalgleichungen?

Die Normalgleichungen sind im Allgemeinen schlechter konditioniert, da sich die Kondition quadriert.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 2 + 1 + 2 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} - \sin x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad x = (x_1, x_2)^T$$

besitze in $D := [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$ genau eine Nullstelle x^* (kein Beweis nötig).

a) (3 Punkte) Geben Sie die Iterationsfunktion Φ des Newton–Verfahrens zur Bestimmung von Näherungen der Nullstelle x^* von f explizit an.

$$J := f'(x) = \begin{pmatrix} 1/(2\sqrt{x_1}) & -cos(x_2) \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Newton: löse $J\,\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)})$; $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ (1 Punkt)

(formal) $\Phi(x) = x - J^{-1}\,f(x)$

(oder $x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1} f(x^{(k)}\ )$)

b) (3 Punkte) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (1, \pi/2)^T$ einen Schritt des Newton–Verfahrens durch (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner)

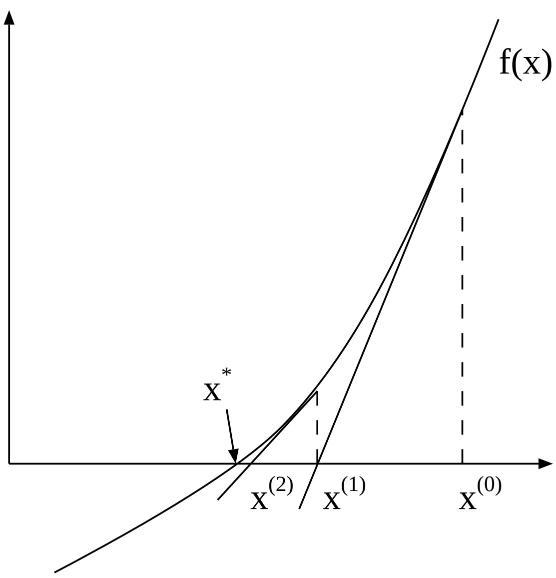
$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \implies f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi^2/4 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & \pi \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/4 \end{pmatrix} \implies x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

c) (2 Punkte) Erläutern Sie die Funktionsweise des Newton–Verfahrens im eindimensionalen Fall anhand einer Skizze.

$x^{(1)}$ ergibt sich als Schnittpunkt der x–Achse mit der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkte $\big(x^{(0)}, f(x^{(0)})\big)$.



d) (1 Punkt) Welche Konvergenzordnung besitzt das Newton–Verfahren im Allgemeinen? Ist die Konvergenz im Allgemeinen lokal oder global?

Im Allgemeinen (d.h., wenn die Jakobimatrix an der Lösung nicht singulär ist) liegt *lokal quadratische* Konvergenz vor.

e) (2 Punkte) Erläutern Sie den Unterschied zwischen lokaler und globaler Konvergenz.

Man spricht von *lokaler Konvergenz*, wenn ein Verfahren (u.U. nur dann) konvergiert, wenn der Startwert "genügend" nahe bei der Lösung liegt. (1 Punkt)
Man spricht von *globaler Konvergenz*, wenn ein Verfahren *für alle* Startwerte aus dem Definitionsbereich der Funktion gegen die Lösung konvergiert. (1 Punkt)

Aufgabe 4 (2 + 2 + 4 + 2 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) + ty'(t) + 2 = 0 \qquad \text{für} \qquad t \in [0,1], \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2\,.$$

a) (2 Punkte) Formen Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung um und bestimmen Sie die zugehörigen Anfangswerte.

$$y_1(t) := y(t) \implies y_1'(t) := y_2(t) \quad \text{und} \quad y_2(t) := y'(t) \implies y_2'(t) := -t\,y_2(t) - 2$$

$$z(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad f(t, z(t)) := \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -t\,y_2(t) - 2 \end{pmatrix} \qquad z_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit lautet das System $z'(t) = f(t, z(t))$ mit $z(0) = z_0$ (2 Punkte)

b) (2 Punkte) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit dem **expliziten** Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$ (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

Das Verfahren lautet $z_{k+1} = z_k + h\,f(t_k, z_k)$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

c) (4 Punkte) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit dem **impliziten** Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$ (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

Das Verfahren lautet $z_{k+1} = z_k + h\,f(t_{k+1}, z_{k+1})$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies z_1 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} z_2 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \implies z_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/15 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

d) (2 Punkte) Geben Sie eine Näherung für $y(1)$, $y'(1)$ und $y''(1)$ an, wobei Sie wahlweise die Ergebnisse aus b) oder c) verwenden.

Aus b): $y(1) \approx 5/2$ $\quad y'(1) \approx -1/4$ $\quad y''(1) \approx -7/4$

Aus c): $y(1) \approx 4/3$ $\quad y'(1) \approx -2/15$ $\quad y''(1) \approx -28/15$