Aufgabe 1

a) Berechnung der Kondition

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3000 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} == \frac{1}{-4498.0} \begin{pmatrix} 1 & -3000 \\ -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 3002 \ , \ \|A^{-1}\|_\infty = .667185 \rightarrow cond_\infty(A) = 2002.89$$

b) Löse LGS mit Pivotisierung in 3-stelliger GPA

Pivotzeile: 1

$$L_{2,1} = .75000$$

$$A_{2,2} = 1 - .750 \cdot 3000 = 1 - 2250 = -2250$$

$$b_2 = 1.17 - .750 \cdot 2000 = 1.17 - 1500 = -1500$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 2 & 3000 & | & 2000 \\ 0 & -2250 & | & -1500 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{-1500}{-2250} = .667$$

$$x_1 = \frac{2000 - 3000 \cdot .667}{2} = \frac{2000 - 2000}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ .667 \end{pmatrix}$$

c) Löse LGS mit Skalierung und Pivotisierung in 3-stelliger GPA

$$s_1 = \sum_j |A_{1j}| = 2 + 3000 =_3 3000 \ , \ s_2 = \sum_j |A_{2j}| = 1.5 + 1 =_3 2.5$$

$$\rightarrow \left(\tilde{A} \mid \tilde{b}\right) = \begin{pmatrix} .000667 & 1.00 & | & .667 \\ .600 & .400 & | & .468 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile: 2

$$L_{2,1} = \frac{.000667}{.600} = .00111$$

$$A_{2,2} = 1.00 - .00111 \cdot .400 = 1.00 - .000444 = 1.00$$

$$b_2 = .667 - .00111 \cdot .468 = .667 - .000519 = .666$$

$$\begin{pmatrix} .600 & .400 & | & .468 \\ 0 & 1.00 & | & .666 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{.666}{1.00} = .666$$

$$x_1 = \frac{.468 - .400 \cdot .666}{.600} = \frac{.468 - .266}{.600} = \frac{.202}{.600} = 0.337$$

$$x = \begin{pmatrix} .337 \\ .666 \end{pmatrix}$$

d) Pivotisierung erhöht die Stabilität (reduziert die Rundungsfehler), **Skalierung** optimiert die Kondition.

Aufgabe 2

$$F(x) = \tan(x - 0.5) \rightarrow F'(x) = 1 + (\tan(x - 0.5))^2 \geq 1$$

F ist folglich nicht kontraktiv; also: Umkehrfunktion (wie in den Übungen mit $\ln(x+2)$ oder Skript 5.7 Aufgabe 7).

$$\Phi(x) = 0.5 + \arctan x \rightarrow \Phi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Wertetabelle und Skizze:

x_i	0	.5	1.0	1.5
$\Phi(x_i)$	.5000	.9636	1.2854	1.4828

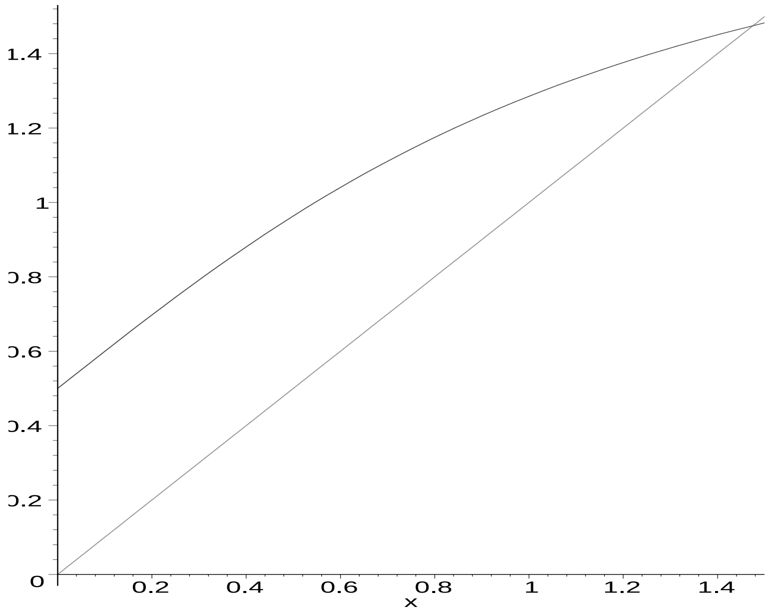

Abbildung in sich:
Wegen $\Phi'(x) > 0$ ist Φ streng monoton steigend. Es reicht also eine Randwertuntersuchung auf dem Intervall $I = [0, 1.5]$. Aus obiger Wertetabelle geht unmittelbar hervor, daß $F(I) \subset [0.5, 1.5] =: J \subset I$ ist.

Kontraktivität:
Wenn ein Fixpunkt vorliegt, dann nur in dem **abgeschlossenen** Intervall J. Dort ist $\Phi'(x) > 0$ und streng monoton fallend. Folglich ist dort $|\Phi'(x)| \leq \Phi'(0.5) = 0.8 < 1$.

Damit existiert also auf J genau ein Fixpunkt. Wegen obiger Wertetabelle und der Monotonie von Φ wird auch $\tilde{I} := [1.2, 1.5]$ in sich abgebildet. Dort gilt $|\Phi'(x)| \leq \Phi'(1.2) = 0.40... < 0.41 =: \alpha < 1$.
Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \varepsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\varepsilon = 0.01$ und $x_0 = 1.5 \rightarrow x_1 = F(x_0) = 1.4828$ (Wertetabelle) ergibt diese Formel $\tilde{n} = 1.2....$ Also ist es hinreichend, 2 Iterationen auszuführen.

$$x_2 = 1.47746$$

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_2 - \overline{x}| \leq 0.0037... < 0.0038$$

Aufgabe 3

t_i	-1	0	1.5
y_i	1	2	1.5

Modell:

$$y(t) = a\ t + b\ \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

Das Modell führt auf folgendes System:

$$\|A\,x - f\|_2 \rightarrow min \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & .7071 \\ 0 & 1 \\ 1.5 & .3827 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Givens-Rotationen:
Eliminiere a_{31} : $\tau = \dfrac{-1}{1.5} = -.6667 \rightarrow s = .8319 \rightarrow c = -.5546$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1.803 & -.0738 & | & .6934 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & -.8004 & | & -1.664 \end{pmatrix}$$

Eliminiere a_{32} : $\tau = \dfrac{-.8004}{1} - .8004 \rightarrow c = .7806 \rightarrow s = -.6248$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1.803 & -.0738 & | & .6934 \\ 0 & 1.281 & | & 2.601 \\ 0 & 0 & | & -.049 \end{pmatrix}$$

Somit ist das Residuum $|\tilde{f}_3| = |-.049| = .049$

$$b = \frac{2.601}{1.281} = 2.030 \quad \text{und} \quad a = \frac{.6934 - 2.030 \cdot (-.0738)}{1.803} = .4677$$

$$y(t) = 0.4677\ t + 2.030\ \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

Aufgabe 4

$$r_A = \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot r_A} (r_A + r_b) \quad \text{falls: } cond(A) \cdot r_A < 1$$

$$A = \begin{pmatrix} .1111 & .1429 \\ .1429 & .1847 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{9.976 \cdot 10^{-05}} \begin{pmatrix} .1847 & -.1429 \\ -.1429 & .1111 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = .3276 \quad , \quad \|A^{-1}\|_1 = 3283.8 \to cond_1(A) = 1075.8$$

$$\|\Delta A\|_1 \leq .00050 \to r_{A1} \leq .001526 \to cond_1(A) \cdot r_{A1} \leq 1.6420$$

Somit ist obige Formel für die 1-Norm nicht anwendbar, und wir erhalten keine Aussage über den Fehler.

Der Rest ist hier in 4-stelliger, bzw. beim Residuenvektor in 8-stelliger (doppeltgenau), Gleitpunktarithmetik durchgeführt.

$$A = \begin{pmatrix} .1111 & .1429 \\ .1429 & .1847 \end{pmatrix} \to L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.286 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} .1111 & .1429 \\ 0 & .0009 \end{pmatrix}$$

$$L_{21} = \frac{.1429}{.1111} = 1.286$$

$$R_{22} = .1847 - 1.286 \cdot .1429 = .0009$$

Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = b$):

$$y_2 = .1540 - 1.286 \cdot .1194 = .0005$$

Rückwärtseinsetzen ($R \cdot x = y$)

$$x_2 = \frac{.0005}{.0009} = .5556$$

$$x_1 = \frac{.1194 - .1429 \cdot .5556}{.1111} = .3600$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.3600 \\ .5556 \end{pmatrix}$$

Residuenvektor doppelt genau:

$$r = A \cdot x - b = \begin{pmatrix} .11939124 \\ .15406332 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} .1194 \\ .1540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.76 \cdot 10^{-06} \\ 6.332 \cdot 10^{-05} \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = r$):

$$y_2 = 6.332 \cdot 10^{-05} - 1.286 \cdot (-8.76 \cdot 10^{-06}) = 7.459 \cdot 10^{-05}$$

Rückwärtseinsetzen ($R \cdot \Delta x = y$)

$$\Delta x_2 = \frac{7.459 \cdot 10^{-05}}{.0009} = .08288$$

$$\Delta x_1 = \frac{-8.76 \cdot 10^{-06} - .1429 \cdot .08288}{.1111} = -.1067$$

Korrektur $x \leftarrow x - \Delta x$:

$$x \leftarrow x - \Delta x = \begin{pmatrix} .3600 \\ .5556 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -.1067 \\ .08288 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4667 \\ .4727 \end{pmatrix}$$

Zum Vergleich die tatsächliche Lösung (auf 5 Stellen gerundet):

$$x = \begin{pmatrix} 0.46692 \\ 0.47253 \end{pmatrix}$$