# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15
# überarbeitete Verständnisfragen – Klausur Frühjahr 2013

**VF-1:** Es seien $x_{\text{MIN}}$ bzw. $x_{\text{MAX}}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | In $\mathbb{M}(3, 3, -5, 3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 26$. | wahr |
| 2. | Geben Sie $x_{\text{MAX}}$ für $\mathbb{M}(3, 3, -5, 3)$ an. | **26** |
| 3. | Die Zahl 0.1 ist in $\mathbb{M}(2, 32, -99, 99)$ exakt darstellbar. | falsch |
| 4. | Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}\,\lvert x\rvert$. | wahr |
| 5. | In $\mathbb{M}(100, 4, -99, 99)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-8}$. | falsch |
| 6. | In $\mathbb{M}(100, 4, -99, 99)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{p}$. Geben Sie $p$ an. | **-7** |
| 7. | Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 10 in $\mathbb{M}(2, 8, -8, 8)$ an. | **1010** |
| 8. | Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 10 in $\mathbb{M}(3, 8, -8, 8)$ an. | **101** |

**VF-2:** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\, e^{4\,x^2}$. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen.)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = 1 + 8\,x^2$. | falsch |
| 2. | Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \max\{1, 8\,x^2\}$. | wahr |
| 3. | Das Problem ist schlecht konditioniert für $\lvert y\rvert \to \infty$. | falsch |
| 4. | Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen. | falsch |
| 5. | Berechnen Sie $\kappa_{rel}(0.5, 0.5)$ für die Funktion $f(x, y) = y^2 e^{2x}$. | **2** |

**VF-3:** Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien $R$ bzw. $L$ eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, $P$ eine Permutationsmatrix und $D$ eine reguläre Diagonalmatrix.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Ist $A$ regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix $P$, so dass $P\,A = L\,R$ gilt. | wahr |
| 2. | Ist $A$ regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix $P$, so dass $P\,D\,A = L\,R$ gilt. | wahr |
| 3. | Aus $P\,D\,A = L\,R$ folgt, dass $A$ genau dann positiv definit ist, wenn A symmetrisch ist und alle Diagonalelemente von $D$ positiv sind. | falsch |
| 4. | Beschreibt die Diagonalmatrix $D$ eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := D\,A$ die Ungleichung $\kappa_\infty(B) \geq \kappa_\infty(A)$ für die Konditionszahlen von $A$ und $B$ bezüglich der $\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_\infty$-Norm. | falsch |
| 5. | Berechnen Sie $\lVert A\rVert_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$. | **21** |

**VF-4:** Es seien $A$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definite Matrizen.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A + B$ ist immer symmetrisch positiv definit. | wahr |
| 2. | $A \cdot B$ ist immer symmetrisch positiv definit. | falsch |
| 3. | Wenn $x$ Eigenvektor von $A$ ist, dann ist $x$ auch Eigenvektor von $A^{-1}$. | wahr |
| 4. | Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung von $A$ ist auch ohne Pivotisierung stabil. | wahr |
| 5. | Geben Sie den größten Eigenwert von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ an. | **6** |

| **VF-5:** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q\,R = A$ eine $Q\,R$-Zerlegung von $A$. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. | | |
|---|---|---|
| 1. | $A\,x = b \Leftrightarrow R\,x = Q^T\,b$ | wahr |
| 2. | $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$ | wahr |
| 3. | Zur Lösung von $A\,x = b$ über die $Q\,R$-Zerlegung muss $Q$ explizit bestimmt werden. | falsch |
| 4. | Es sei zusätzlich $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q_B\,R_B = B$ eine $Q\,R$-Zerlegung von $B$. Dann ist $(Q\,Q_B)\,(R\,R_B)$ eine $Q\,R$-Zerlegung von $A\,B$. | falsch |
| 5. | Für welche $\alpha$ ist die Matrix $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha \end{pmatrix}$ orthogonal? | **-0.70711** |

| **VF-6: Nicht im SS15** Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem: bestimme $x^*$ mit minimaler 2-Norm so, dass $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Es sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von $A$.<br>Für die Pseudoinverse $A^+$ gilt $A^+ = V\Sigma^+U^T$. | wahr |
| 2. | Es seien $\sigma_1$ der größte und $\sigma_r$ der kleinste (positive) Singulärwert von $A$.<br>Dann gilt: $\|A\|_2 = \sigma_1/\sigma_r$. | falsch |
| 3. | Die Lösung $x^*$ des linearen Ausgleichsproblems mit minimaler 2-Norm ist immer eindeutig. | wahr |
| 4. | Es seien $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Matrizen. Dann haben $A$ und $Q_1\,A\,Q_2$ die selben Singulärwerte. | wahr |
| 5. | Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $x^*$. | **1.5** |

| **VF-7:** Es seien $0 < a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x/2 + a/(2\,x)$. | | |
|---|---|---|
| 1. | $x^* = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt von $\Phi$. | wahr |
| 2. | Das Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$ quadratisch gegen $\sqrt{a}$. | wahr |
| 3. | Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert nur, falls $x_0$ hinreichend nahe am Fixpunkt gewählt wird. | falsch |
| 4. | Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle $x_0 > \sqrt{a}$ und die Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend. | wahr |
| 5. | Bestimmen Sie $x_2$ für $a = 9$ und $x_0 = 4$. | **3.0025** |

| **VF-8:** Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $\lvert\Phi'(x^*)\rvert < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $\lvert x_0 - x^*\rvert$ hinreichend klein ist. | wahr |
| 2. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein. | wahr |
| 3. | Das Fixpunktverfahren lässt sich stets auch als Newton-Verfahren für ein entsprechendes Nullstellenproblem interpretieren. | falsch |
| 4. | Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1. | wahr |
| 5. | Bestimmen Sie den positiven Fixpunkt $x^*$ von $\Phi(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{x}$. | **2** |

| **VF-9:** Nichtlineare Ausgleichsrechnung | | |
|---|---|---|
| 1. | Wenn das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, dann ist es lokal quadratisch konvergent. | falsch |
| 2. | Ein lokales Minimum kann für die Gauß-Newton-Methode abstoßend sein. | wahr |
| 3. | Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem. | wahr |
| 4. | In der Praxis verwendet man das Levenberg-Marquardt-Verfahren, weil es fast immer schneller konvergiert als das Gauß-Newton-Verfahren. | falsch |
| 5. | Für die Funktion $f(t) = a^t$ hat man Messwerte $f(1) = 2$ und $f(2) = 4$. Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem und bestimmen Sie $a_1$ durch das Gauß-Newton-Verfahren mit Startwert $a_0 = 2$. | **2** |

| **VF-10:** Es sei $\Pi_n = \left\{\sum_{j=0}^n a_j x^j \vert a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) $n$. Ferner seien $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ die Lagrange–Fundamentalpolynome und $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$. | | |
|---|---|---|
| 1. | $l_{jn}(x)$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von $\Pi_n$. | wahr |
| 2. | Die Lagrange–Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, n$. | wahr |
| 3. | $\left\{a_0, a_1\, x, a_2\, x^2, \dots, a_n\, x^n\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$. | wahr |
| 4. | Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$. | falsch |
| 5. | Seien $n = 2$, $x_0 = 7, x_1 = 3, x_2 = 1$. Berechnen Sie $l_{02}(4)$. | **0.125** |

| **VF-11:** Es sei $P(f \vert x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$. | | |
|---|---|---|
| 1. | $P(\Psi \vert x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome $\Psi$. | falsch |
| 2. | Für beliebige $f$ ist $P(f \vert x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$. | wahr |
| 3. | Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f$ gilt: $P(f \vert x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$. | falsch |
| 4. | Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \lvert P(f \vert x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) \rvert$ wird mit wachsendem $n$ immer kleiner. | falsch |
| 5. | Es seien $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$. Berechnen Sie $P(f \vert x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$. | **1.5** |

| **VF-12:** Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch durch geeignete Quadraturformeln approximiert werden. | | |
|---|---|---|
| 1. | Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel. | falsch |
| 2. | Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn $f$ ein Polynom vom Grade $\leq 2$ ist. | falsch |
| 3. | Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn $f$ ein Polynom vom Grade $\leq 2$ ist. | falsch |
| 4. | Geben Sie den Exaktheitsgrad der summierten Simpsonregel an. | **3** |
| 5. | Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn $f$ ein Polynom vom Grade $\leq 3$ ist. | wahr |
| 6. | Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^{10} x^2$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel. | **250** |