Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15
überarbeitete Verständnisfragen – Klausur Frühjahr 2013

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(3, 3, -5, 3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 26$.	
2.	Geben Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3, 3, -5, 3)$ an.	
3.	Die Zahl 0.1 ist in $\mathbb{M}(2, 32, -99, 99)$ exakt darstellbar.	
4.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}\,\lvert x\rvert$.	
5.	In $\mathbb{M}(100, 4, -99, 99)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-8}$.	
6.	In $\mathbb{M}(100, 4, -99, 99)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{p}$. Geben Sie p an.	
7.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 10 in $\mathbb{M}(2, 8, -8, 8)$ an.	
8.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 10 in $\mathbb{M}(3, 8, -8, 8)$ an.	

VF-2: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\, e^{4\,x^2}$. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen.)

1.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = 1 + 8\,x^2$.	
2.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \max\{1, 8\,x^2\}$.	
3.	Das Problem ist schlecht konditioniert für $\lvert y\rvert \to \infty$.	
4.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.	
5.	Berechnen Sie $\kappa_{rel}(0.5, 0.5)$ für die Funktion $f(x, y) = y^2 e^{2x}$.	

VF-3: Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine reguläre Diagonalmatrix.

1.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $P\,A = L\,R$ gilt.	
2.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $P\,D\,A = L\,R$ gilt.	
3.	Aus $P\,D\,A = L\,R$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn A symmetrisch ist und alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
4.	Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := D\,A$ die Ungleichung $\kappa_\infty(B) \geq \kappa_\infty(A)$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_\infty$-Norm.	
5.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$.	

VF-4: Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definite Matrizen.

1.	$A + B$ ist immer symmetrisch positiv definit.	
2.	$A \cdot B$ ist immer symmetrisch positiv definit.	
3.	Wenn x Eigenvektor von A ist, dann ist x auch Eigenvektor von A^{-1}.	
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung von A ist auch ohne Pivotisierung stabil.	
5.	Geben Sie den größten Eigenwert von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ an.	

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q\,R = A$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.		
1.	$A\,x = b \Leftrightarrow R\,x = Q^T\,b$	
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$	
3.	Zur Lösung von $A\,x = b$ über die $Q\,R$-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.	
4.	Es sei zusätzlich $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q_B\,R_B = B$ eine $Q\,R$-Zerlegung von B. Dann ist $(Q\,Q_B)\,(R\,R_B)$ eine $Q\,R$-Zerlegung von $A\,B$.	
5.	Für welche α ist die Matrix $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha \end{pmatrix}$ orthogonal?	

VF-6: Nicht im SS15 Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem: bestimme x^* mit minimaler 2-Norm so, dass $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.		
1.	Es sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A. Für die Pseudoinverse A^+ gilt $A^+ = V\Sigma^+U^T$.	
2.	Es seien σ_1 der größte und σ_r der kleinste (positive) Singulärwert von A. Dann gilt: $\|A\|_2 = \sigma_1/\sigma_r$.	
3.	Die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblems mit minimaler 2-Norm ist immer eindeutig.	
4.	Es seien $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Matrizen. Dann haben A und $Q_1\,A\,Q_2$ die selben Singulärwerte.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x^*.	

VF-7: Es seien $0 < a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x/2 + a/(2\,x)$.		
1.	$x^* = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt von Φ.	
2.	Das Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$ quadratisch gegen $\sqrt{a}$.	
3.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert nur, falls x_0 hinreichend nahe am Fixpunkt gewählt wird.	
4.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle $x_0 > \sqrt{a}$ und die Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.	
5.	Bestimmen Sie x_2 für $a = 9$ und $x_0 = 4$.	

VF-8: Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein ist.	
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	
3.	Das Fixpunktverfahren lässt sich stets auch als Newton-Verfahren für ein entsprechendes Nullstellenproblem interpretieren.	
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	
5.	Bestimmen Sie den positiven Fixpunkt x^* von $\Phi(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{x}$.	

VF-9: Nichtlineare Ausgleichsrechnung		
1.	Wenn das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, dann ist es lokal quadratisch konvergent.	
2.	Ein lokales Minimum kann für die Gauß-Newton-Methode abstoßend sein.	
3.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	
4.	In der Praxis verwendet man das Levenberg-Marquardt-Verfahren, weil es fast immer schneller konvergiert als das Gauß-Newton-Verfahren.	
5.	Für die Funktion $f(t) = a^t$ hat man Messwerte $f(1) = 2$ und $f(2) = 4$. Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem und bestimmen Sie a_1 durch das Gauß-Newton-Verfahren mit Startwert $a_0 = 2$.	

VF-10: Es sei $\Pi_n = \left\{\sum_{j=0}^n a_j x^j \vert a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner seien $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ die Lagrange–Fundamentalpolynome und $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.		
1.	$l_{jn}(x)$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von Π_n.	
2.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \ldots, n$.	
3.	$\left\{a_0, a_1\, x, a_2\, x^2, \ldots, a_n\, x^n\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	
5.	Seien $n = 2$, $x_0 = 7, x_1 = 3, x_2 = 1$. Berechnen Sie $l_{02}(4)$.	

VF-11: Es sei $P(f \vert x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.		
1.	$P(\Psi \vert x_0, \ldots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ.	
2.	Für beliebige f ist $P(f \vert x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.	
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f \vert x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \vert P(f \vert x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x) \vert$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	
5.	Es seien $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$. Berechnen Sie $P(f \vert x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch durch geeignete Quadraturformeln approximiert werden.		
1.	Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.	
2.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
3.	Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
4.	Geben Sie den Exaktheitsgrad der summierten Simpsonregel an.	
5.	Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.	
6.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^{10} x^2$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.	