Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15
überarbeitete Verständnisfragen – Klausur Herbst 2013

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(10,8,-2,4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.001$.	
2.	Geben Sie x_{MIN} für $\mathbb{M}(10,8,-2,4)$ an.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le$ eps und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.	
4.	Es gilt $\left\lvert \frac{\text{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \le$ eps für alle $x \in \mathbb{D}$.	
5.	Die Zahl 256 ist in $\mathbb{M}(2,4,-6,6)$ exakt darstellbar.	
6.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 14 in $\mathbb{M}(2,8,-9,9)$ an.	
7.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 14.5 in $\mathbb{M}(4,8,-9,9)$ an.	

VF-2:

1.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = y\,e^{x^2}$. Für $x = 1$ und $y \neq 0$ hat die relative Konditionszahl den Wert $\kappa_{rel} = 2$.	
2.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = y\,e^{x^2}$. Berechnen Sie κ_{rel} für $(x,y) = (1,7)$.	
3.	Die Funktion $f(x,y) = x - y$ ist für alle (x,y) mit $(x,y) \neq (0,0)$ gut konditioniert.	
4.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
5.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es stabile Algorithmen zur Lösung des Problems.	
6.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x^2 \ln y$ im Punkt $(1, e^2)$.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig, aber regulär.

1.	Ohne Pivotisierung ist Gauß-Elimination für A nicht immer durchführbar.	
2.	Zeilenäquilibrierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	
3.	Betrachte $Ax = b$ und sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Liegt nur eine Störung der Eingabedaten b vor, so ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
4.	Es sei $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix Q. Dann gilt: $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.	
5.	Sei $A = QR$, wobei Q eine orthogonale Matrix ist und $R = \begin{pmatrix} 2.7 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_2(A)$.	

VF-4: Mit $A, L, R, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix, R eine rechte obere Dreiecksmatrix, D eine Diagonalmatrix und A symmetrisch positiv definit.		
1.	Es existiert eine Zerlegung $A = L\,D\,L^T$.	
2.	Es existiert eine Zerlegung $A = L\,R$.	
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen (Operationen gem. Vorlesung).	
4.	Der Rechenaufwand für die L-R-Zerlegung mit Pivotisierung ist etwa $a\,n^p$ Operationen (Operationen gem. Vorlesung). Geben Sie a an.	
5.	Der Rechenaufwand für die L-R-Zerlegung mit Pivotisierung ist etwa $a\,n^p$ Operationen (Operationen gem. Vorlesung). Geben Sie p an.	
6.	Die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung ist für die Matrix A immer durchführbar.	
7.	Sei $A = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.2 & 1.6 \\ 1.5 & 1.1 & 1.4 \\ 19 & 2.9 & 3.1 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\det(D)$.	

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A.		
1.	Es seien $m = n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A\,x = b \Leftrightarrow R\,x = Q^T\,b$.	
2.	Die $Q\,R$-Zerlegung von A kann mittels Householder Transformationen auch ohne Pivotisierung stabil bestimmt werden.	
3.	Es sei $m = n$. Dann gilt: $\det A = \det R$.	
4.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
5.	Sei Q eine orthogonale Matrix. Geben Sie $\|2015Q^{4711}\|_2$ an.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt.		
1.	Es gilt $\|\|Ax - b\|\|_2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \mathrm{Bild}(A)$.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$, so gilt: $x^* = R^{-1}\,Q\,b$.	
4.	Die Matrix R kann man über die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T\,A$ bestimmen.	
5.	Sei $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung der symmetrisch positiv definiten Matrix A mit $\det(A) = 10$. Geben Sie $\det(L)$ an.	

VF-7: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
2.	Für die Teilmenge $E := [0, 1]$ sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.	
3.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	
4.	Die Fixpunktiteration hat die Konvergenzordnung 2.	
5.	Bestimmen Sie x_0 für $x_1 = 1$.	

VF-8: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir nehmen an, dass $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$, und betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^*:

$$x_0 \in U, \quad x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

1.	Die Newton-Methode ist lokal quadratisch konvergent.	
2.	Geben Sie die lokale Konvergenzordnung an, mit die Newton-Methode für diesen Fall mindestens konvergiert.	
3.	Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große Werte von $k:\ \|\|x_k - x^*\|\| \approx \|\|x_k - x_{k+1}\|\|$.	
4.	Beim Newtonverfahren kann eine Dämpfungsstrategie benutzt werden, die dazu dient für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.	
5.	Beim Newtonverfahren kann eine Dämpfungsstrategie benutzt werden, die dazu dient Auslöschungseffekte bei der Berechnung der Korrektur zu vermeiden.	
6.	Sei $f(x) = x^2 + x - 1$ und $x_0 = 0$. Bestimmen Sie x_2.	

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Die Gauß-Newton-Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung einer Lösung x^*.	
2.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, so ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.	
3.	Beim Gauß-Newton-Verfahren hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	
5.	Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2x - 2 \end{pmatrix}$. Geben Sie x^* an.	

VF-10: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert.

1.	Das Polynom $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ ist eindeutig.	
2.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$.	
3.	Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.	
4.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	
5.	Es seien $f(x_0) = 2$ und $f(x_1) = -1$. Berechnen Sie $P(f\|x_0, x_1)(\frac{x_0 + x_1}{2})$.	

VF-11: Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ die Newton-Cotes-Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Newton-Cotes-Formel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j := a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

1.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
2.	Es gilt $\|I_1^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	
3.	Bei der summierten Simpson-Regel $I_2^n(f)$ gilt $I(f) - I_2^n(f) = \mathcal{O}(h^4)$.	
4.	Der Exaktheitsgrad von $I_{m+1}(f)$ ist stets größer als der von $I_m(f)$.	
5.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^9 \frac{1}{x}$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.	

VF-12: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch durch eine Gauß-Quadraturformel $G_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} \omega_j f(x_j)$, mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$ approximiert werden.

1.	Die Gewicht ω_j können für große m auch negativ werden.	
2.	Es sei $m = 1$. Die Gauß-Quadratur hat dann die Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$.	
3.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
4.	$G_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	
5.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^6 2^x$ mit Hilfe der Simpson-Regel.	