Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15
überarbeitete Verständnisfragen – Klausur Frühjahr 2014

VF-1:		
1.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.	falsch
2.	Die Multiplikation zweier Zahlen ist stets gut konditioniert.	wahr
3.	Die Funktion $f(x,y) = x + y^2$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.	wahr
4.	Die Funktion $f(x,y) = y\, e^{x^2}$ ist für $(x,0)$ mit $x \to \infty$ gut konditioniert.	falsch
5.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^3$ im Punkt $(1,1)$.	**1.5**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_2(B) \le \kappa_2(A)$.	falsch
2.	Es seien $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|\tilde{x} - x\| \le \kappa(A)\|\tilde{b} - b\|$.	falsch
3.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	falsch
4.	Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von A.	wahr
5.	Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.	**2.5**

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $P\,A = L\,R$.	wahr
2.	Eine $L\,R$-Zerlegung $P\,A = L\,R$ kann man verwenden um A^{-1} zu bestimmen.	wahr
3.	Falls A symmetrisch ist, existiert immer eine Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ von A.	falsch
4.	Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	wahr
5.	Sei $A = LDL^T$ die Cholesky Zerlegung der symmetrisch positiv definiten Matrix $A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 2.4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $d_{1,1} + d_{2,2}$.	**3.6**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A.		
1.	Es seien $m = n$, $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A\,x = b \Leftrightarrow x = R^{-1}Qb$.	falsch
2.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der $Q\,R$-Zerlegung ist immer stabil.	wahr
3.	Es gilt: $\|A\|_2 = \|R\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm ist.	wahr
4.	Das Produkt zweier orthogonaler $m \times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	wahr
5.	Seien $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ drei orthogonale Matrizen. Berechnen Sie $\|4\,Q_1Q_2Q_3\|_2$.	**4**

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $H_1, \ldots, H_k$ Householder-Transformationen, sodass $H_k \ldots H_2\,H_1\,A = R$ ist, mit einer oberen Dreiecksmatrix R. Weiter sei $Q = H_k \ldots H_2\,H_1$.		
1.	Für jede der Householder-Transformationen H_j, $1 \le j \le k$, gilt $H_j^{-1} = H_j$.	wahr
2.	Die Produktmatrix Q ist orthogonal.	wahr
3.	Die Produktmatrix Q ist immer eine Spiegelung.	falsch
4.	Es seien $m = n$ und A regulär. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	falsch
5.	Seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v. Geben Sie $Q_{v1,1}$ an.	**0.8**

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \le m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.		
1.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \min \Leftrightarrow A^T\,(A\,x - b) = 0$.	wahr
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	falsch
3.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.	wahr
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	wahr
5.	Sei $QA = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|r\|$.	**5**

VF-7: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.		
1.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	falsch
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1.	falsch
3.	Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr
5.	Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) := x^2 + x - \frac{1}{x}$. Geben Sie den eindeutigen Fixpunkt von Φ an.	**1**

VF-8: Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0,\ f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $[a, b]$ ein Intervall, sodass $a < x^* < b$ und x^* die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.		
1.	Das Bisektionsverfahren konvergiert, wenn man die Startwerte $x_0 = a$, $x_1 = b$ wählt.	wahr
2.	Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	falsch
3.	Es sei f konvex auf $[a, b]$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	falsch
4.	Es sei $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dann gilt: $\Phi'(x^*) = 0$.	wahr
5.	Sei $b - a = 2$. Wieviele Schritte k braucht das Bisektionsverfahren um eine Genauigkeit $\|x^* - x_k\| \le 0.125$ zu garantieren? Es wird angenommen, dass $x_0 = \frac{a+b}{2}$.	**3**

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*.	falsch
2.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	wahr
3.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.	falsch
4.	Um Konvergenz des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu gewährleisten, muss der in diesem Verfahren verwendete Parameter hinreichend groß gewählt werden.	wahr
5.	Für die Funktion $f(t) = \sin(at)$ hat man Messwerte $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $f(\pi) = 0$. Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem und bestimmen Sie a_1 durch das Gauß-Newton-Verfahren mit Startwert $a_0 = 1$.	**1**

VF-10: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ interpoliert. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\dots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $P(f\,\|\,x_0,\dots,x_n)(x) = P(f\,\|\,x_0,\dots,x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f\,\|\,x_0,\dots,x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	falsch
3.	Es sei f ein Polynom vom Grad maximal n. Dann gilt: $f(x) = P(f\,\|\,x_0,\dots,x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
4.	Es gilt: $\delta_n = [x_n,\dots,x_0]f$.	wahr
5.	Es seien $f(x_0)=1$ und $f(x_1)=3.5$. Berechnen Sie $P(f\|x_0,x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	**2.25**

VF-11: Es sei $f \in C^\infty([a,b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$.		
1.	Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f\,\|\,x_0,\dots,x_m)(x)\,dx$, wobei $P(f\,\|\,x_0,\dots,x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad m ist.	wahr
2.	Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls f ein Polynom vom Grad maximal m ist.	wahr
3.	Es sei m fest gewählt. Der Fehler $\|I_m(f) - I(f)\|$ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel.	falsch
4.	Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\|I_m(f) - I(f)\| \to 0$ für $m \to \infty$.	falsch
5.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^3 x^3$ mit Hilfe der Trapezregel.	**28**

VF-12: Nicht im SS15: Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t,y)$, $t \in [t_0,T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$.		
1.	Der lokale Abbruchfehler misst, wie sehr der durch das numerische Verfahren gelieferte Wert nach einem Schritt von der exakten Lösung abweicht.	wahr
2.	Eine sehr hohe Konsistenzordnung kann man nur mit impliziten Verfahren realisieren.	falsch
3.	Die Größe des lokalen Abbruchfehlers bestimmt die Konsistenzordnung.	wahr
4.	Das verbesserte Eulerverfahren hat die Konvergenzordnung 2.	wahr
5.	Es seien $y'(t) = 2^t y$, $t_0 = 1$ und $y^0 = y(t_0) = 1$. Berechnen Sie mit Euler-Verfahren eine Näherung y^1 von $y(t_0+h)$ für $h = 0.1$.	**1.2**