

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15 überarbeitete Verständnisfragen – Klausur Frühjahr 2014

|  |   |
|--|---|
| <b>VF-1:</b>   |   |
| 1.   | Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.  |
| 2.   | Die Multiplikation zweier Zahlen ist stets gut konditioniert.   |
| 3.   | Die Funktion $f(x, y) = x + y^2$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ .   |
| 4.   | Die Funktion $f(x, y) = y e^{x^2}$ ist für $(x, 0)$ mit $x \rightarrow \infty$ gut konditioniert.   |
| 5.   | Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^3$ im Punkt $(1, 1)$ .   |
| <b>VF-2:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ .   |   |
| 1.   | Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $A$ . Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$ .   |
| 2.   | Es seien $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix $A$ bezüglich $\ \cdot\ $ . Es gilt $\ \tilde{x} - x\  \leq \kappa(A)\ \tilde{b} - b\ $ . |
| 3.   | Es existiert immer eine $LR$ -Zerlegung $A = LR$ von $A$ .  |
| 4.   | Es existiert immer eine $QR$ -Zerlegung $A = QR$ von $A$ .  |
| 5.   | Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .  |
| <b>VF-3:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ .   |   |
| 1.   | Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $PA = LR$ .   |
| 2.   | Eine $LR$ -Zerlegung $PA = LR$ kann man verwenden um $A^{-1}$ zu bestimmen.   |
| 3.   | Falls $A$ symmetrisch ist, existiert immer eine Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ von $A$ .  |
| 4.   | Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.   |
| 5.   | Sei $A = LDL^T$ die Cholesky Zerlegung der symmetrisch positiv definiten Matrix $A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 2.4 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie $d_{1,1} + d_{2,2}$ .  |
| <b>VF-4:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A = QR$ eine $QR$ -Zerlegung von $A$ .  |   |
| 1.   | Es seien $m = n$ , $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt: $Ax = b \Leftrightarrow x = R^{-1}Qb$ .   |
| 2.   | Die Householder-Methode zur Bestimmung der $QR$ -Zerlegung ist immer stabil.  |
| 3.   | Es gilt: $\ A\ _2 = \ R\ _2$ , wobei $\ \cdot\ _2$ die euklidische Norm ist.  |
| 4.   | Das Produkt zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.   |
| 5.   | Seien $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ drei orthogonale Matrizen. Berechnen Sie $\ 4Q_1Q_2Q_3\ _2$ .   |
| <b>VF-5:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $H_1, \dots, H_k$ Householder-Transformationen, sodass $H_k \dots H_2 H_1 A = R$ ist, mit einer oberen Dreiecksmatrix $R$ . Weiter sei $Q = H_k \dots H_2 H_1$ . |   |
| 1.   | Für jede der Householder-Transformationen $H_j$ , $1 \leq j \leq k$ , gilt $H_j^{-1} = H_j$ .   |
| 2.   | Die Produktmatrix $Q$ ist orthogonal.   |
| 3.   | Die Produktmatrix $Q$ ist immer eine Spiegelung.  |
| 4.   | Es seien $m = n$ und $A$ regulär. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q)$ , wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.   |
| 5.   | Seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $Q_v$ die Householder Transformation bezüglich $v$ . Geben Sie $Q_{v,1,1}$ an.   |

|  |  |
|--|--|
| <p><b>VF-6:</b> Es seien <math>A \in \mathbb{R}^{m \times n}</math>, mit <math>\text{Rang}(A) = n \leq m</math>, und <math>b \in \mathbb{R}^m</math>. Weiter seien <math>Q \in \mathbb{R}^{m \times m}</math> eine orthogonale Matrix und <math>R \in \mathbb{R}^{n \times n}</math> eine obere Dreiecksmatrix so, dass <math>QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}</math> gilt. Weiter sei <math>x^* \in \mathbb{R}^n</math> die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems <math>\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2</math>.</p> |  |
| 1.   | Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow A^T(Ax - b) = 0$ .  |
| 2.   | Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ .  |
| 3.   | Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ , $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$ .   |
| 4.   | Die Matrix $R$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.  |
| 5.   | Sei $QA = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die $QR$ -Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie $ r $ .   |
| <p><b>VF-7:</b> Es seien <math>\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n</math> stetig differenzierbar und <math>x^*</math> so, dass <math>\Phi(x^*) = x^*</math> gilt. Für <math>x_0 \in \mathbb{R}^n</math> wird die Fixpunktiteration <math>x_{k+1} = \Phi(x_k)</math>, <math>k = 0, 1, 2, \dots</math> definiert. Weiter sei <math>\Phi'(x)</math> die Ableitung (Jacobi-Matrix) von <math>\Phi</math> an der Stelle <math>x</math>.</p>  |  |
| 1.   | Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\ \Phi'(x^*)\  < 1$ .  |
| 2.   | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1.   |
| 3.   | Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.   |
| 4.   | Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\ x_0 - x^*\ $ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.   |
| 5.   | Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , $\Phi(x) := x^2 + x - \frac{1}{x}$ . Geben Sie den eindeutigen Fixpunkt von $\Phi$ an.   |
| <p><b>VF-8:</b> Es seien <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> zweimal stetig differenzierbar, und <math>f(x^*) = 0</math>, <math>f'(x^*) \neq 0</math>. Weiter sei <math>[a, b]</math> ein Intervall, sodass <math>a &lt; x^* &lt; b</math> und <math>x^*</math> die einzige Nullstelle von <math>f</math> in <math>[a, b]</math> ist.</p>   |  |
| 1.   | Das Bisektionsverfahren konvergiert, wenn man die Startwerte $x_0 = a$ , $x_1 = b$ wählt.  |
| 2.   | Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ .  |
| 3.   | Es sei $f$ konvex auf $[a, b]$ , d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ . Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ .  |
| 4.   | Es sei $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Dann gilt: $\Phi'(x^*) = 0$ .  |
| 5.   | Sei $b - a = 2$ . Wieviele Schritte $k$ braucht das Bisektionsverfahren um eine Genauigkeit $ x^* - x_k  \leq 0.125$ zu garantieren? Es wird angenommen, dass $x_0 = \frac{a+b}{2}$ .  |
| <p><b>VF-9:</b> Es sei <math>F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m</math> mit <math>m &gt; n</math> stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme <math>x^* \in \mathbb{R}^n</math> so, dass <math>\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2</math>.</p>   |  |
| 1.   | Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^*$ .   |
| 2.   | Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.   |
| 3.   | Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.  |
| 4.   | Um Konvergenz des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu gewährleisten, muss der in diesem Verfahren verwendete Parameter hinreichend groß gewählt werden.  |
| 5.   | Für die Funktion $f(t) = \sin(at)$ hat man Messwerte $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $f(\pi) = 0$ . Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem und bestimmen Sie $a_1$ durch das Gauß-Newton-Verfahren mit Startwert $a_0 = 1$ . |

|  |   |
|--|---|
| <p><b>VF-10:</b> Es seien <math>n \in \mathbb{N}</math> und <math>P(f x_0, \dots, x_n)</math> das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad <math>n</math>, das die Funktion <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> in den Stützstellen <math>a \leq x_0 &lt; \dots &lt; x_n \leq b</math> interpoliert. Es seien <math>\delta_n</math> der führende Koeffizient dieses Polynoms und <math>[x_0, \dots, x_n]f</math> die dividierte Differenz der Ordnung <math>n</math> von <math>f</math>.</p> |   |
| 1.   | Es gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = P(f x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .                                 |
| 2.   | Der Fehler $\max_{x \in [a, b]}  P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ ist minimal wenn man die Stützstellen $x_i$ äquidistant wählt.                                      |
| 3.   | Es sei $f$ ein Polynom vom Grad maximal $n$ . Dann gilt: $f(x) = P(f x_0, \dots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .   |
| 4.   | Es gilt: $\delta_n = [x_n, \dots, x_0]f$ .  |
| 5.   | Es seien $f(x_0) = 1$ und $f(x_1) = 3.5$ . Berechnen Sie $P(f x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$ .   |
| <p><b>VF-11:</b> Es sei <math>f \in C^\infty([a, b])</math>. Das Integral <math>I(f) = \int_a^b f(x) dx</math> soll numerisch approximiert werden. Es sei <math>I_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)</math> eine Quadraturformel mit <math>a \leq x_0 &lt; \dots &lt; x_m \leq b</math>.</p>   |   |
| 1.   | Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f x_0, \dots, x_m)(x) dx$ , wobei $P(f x_0, \dots, x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad $m$ ist. |
| 2.   | Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls $f$ ein Polynom vom Grad maximal $m$ ist.  |
| 3.   | Es sei $m$ fest gewählt. Der Fehler $ I_m(f) - I(f) $ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel.                             |
| 4.   | Für die Newton-Cotes Formeln gilt $ I_m(f) - I(f)  \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ .  |
| 5.   | Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^3 x^3$ mit Hilfe der Trapezregel.  |
| <p><b>VF-12: Nicht im SS15:</b> Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung <math>y'(t) = f(t, y)</math>, <math>t \in [t_0, T]</math>, mit Anfangswert <math>y(t_0) = y^0</math>.</p>   |   |
| 1.   | Der lokale Abbruchfehler misst, wie sehr der durch das numerische Verfahren gelieferte Wert nach einem Schritt von der exakten Lösung abweicht.                       |
| 2.   | Eine sehr hohe Konsistenzordnung kann man nur mit impliziten Verfahren realisieren.   |
| 3.   | Die Größe des lokalen Abbruchfehlers bestimmt die Konsistenzordnung.  |
| 4.   | Das verbesserte Eulerverfahren hat die Konvergenzordnung 2.   |
| 5.   | Es seien $y'(t) = 2^t y$ , $t_0 = 1$ und $y^0 = y(t_0) = 1$ . Berechnen Sie mit Euler-Verfahren eine Näherung $y^1$ von $y(t_0 + h)$ für $h = 0.1$ .                  |