Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15
überarbeitete Verständnisfragen – Klausur Frühjahr 2015

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(10,8,-1,4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.1$.	
2.	Berechnen Sie x_{MIN} für $\mathbb{M}(10,8,-1,4)$.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq$ eps und $\text{fl}(x) = x(1+\epsilon)$.	
4.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \epsilon\lvert x\rvert$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
5.	Die Zahl 32 ist in $\mathbb{M}(2,6,-8,8)$ exakt darstellbar.	
6.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 19 in $\mathbb{M}(2,6,-8,8)$ an.	
7.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 19 in $\mathbb{M}(7,6,-8,8)$ an.	

VF-2:

1.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
2.	Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur numerischen Lösung des Problems.	
3.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
4.	Die Funktion $f(x) = x\ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $\lvert x-1\rvert \ll 1$.	
5.	Sei $\kappa_{rel}(x)$ die Kondition der Funktion $f(x) = x^3\ln(x)$. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \kappa_{rel}(x)$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Es gilt $A^{-1} = R^{-1}Q^T$.	
2.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl bzgl. $\lVert\cdot\rVert$. Bei Störung der Eingabedaten b ist der absolute Fehler in der Lösung $\lVert\tilde{x} - x\rVert$ maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der absolute Eingabefehler $\lVert\tilde{b} - b\rVert$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
4.	Sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$ oder $\det(A) = -\det(R)$.	
5.	Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0.5 & 1.1 & 0.4 \\ 0.9 & 1 & 3.1 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\det(D)$.	

VF-4: Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt $\det(D) > 0$.	
2.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über das Cholesky-Verfahren beträgt dann etwa an^p Operationen. Geben Sie a an.	
4.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über das Cholesky-Verfahren beträgt dann etwa an^p Operationen. Geben Sie p an.	
5.	Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A ist Pivotisierung notwendig.	
6.	Die inverse Matrix A^{-1} ist symmetrisch positiv definit.	
7.	Sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A)$ an.	

VF-5: Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation.		
1.	Es gilt $Q_v^T = Q_v$.	
2.	Das Produkt zweier Householder-Transformationen ist eine orthogonale Matrix.	
3.	Es gilt $\kappa(Q_v) = 1$, wobei $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm ist.	
4.	Die Berechnung einer $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von A über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix A eine kleine Konditionszahl hat.	
5.	Seien $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und Q_v die zugehörige Householder-Transformation. Geben Sie $Q_{v1,2}$ an.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.		
1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Es gilt $A\,x^* - b \perp \mathrm{Bild}(A)$.	
5.	Es seien $Ax^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 7.4 \\ 6.8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\sin(\Theta)$.	

VF-7: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = e^{-x}$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ erfüllt.	
3.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ erfüllt.	
4.	Die Fixpunktiteration mit der Funktion Φ konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.	
5.	Bestimmen Sie x_0 für $x_1 = e^{-1}$.	

VF-8: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = \|x\|^{2.5} - 3$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.	
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle.	
3.	Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*, und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Es gilt $\|x_k - x^*\| \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.	
4.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen eine Nullstelle.	
5.	Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 3$?	

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\\|F(x^*)\\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\|F(x)\\|_2$.		
1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*.	
2.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Matrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	
3.	Die Gauß-Newton Methode kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
4.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton Methode ist in der Regel 2.	
5.	Für die Funktion $f(t) = \sqrt{t}a$ hat man Messwerte $f(0.25) = 0.1$ und $f(1) = 0.2$. Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem und bestimmen Sie a_1 durch das Gauß-Newton-Verfahren mit Startwert $a_0 = 0.2$.	

VF-10: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n] f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Sei $f(x) = x^2 + 2$. Es gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 0$.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n (x - x_n) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle x.	
3.	Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\|$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.	
4.	Es gilt $\max_{x \in [a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\| \leq \max_{x \in [a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - f(x)\|$.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(1) = 4$ und $f(2) = -3$. Berechnen Sie $P(f\|x_0, x_1)(1.5)$.	

VF-11: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen äquidistant gewählt werden.	
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(x^3) = I(x^3)$.	
3.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a, b]$ ab.	
4.	Seien $Q_m^{NC}(f)$ und $Q_m^{G}(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $Q_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $Q_m^{G}(f)$.	
5.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^7 x^2$ mit Hilfe der Simpsonregel.	

VF-12: Nicht in SS15: Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y)$, $t \in [t_0, T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$.		
1.	Das verbesserte Euler-Verfahren hat die Konsistenzordnung 1.	
2.	Der lokale Abbruchfehler im Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ misst den maximalen Fehler zwischen numerischer Annäherung und exakter Lösung, wobei im numerischen Verfahren als Eingabewert $y^j = y(t_j)$ genommen wird.	
3.	Bei Einschrittverfahren ist die Konvergenzordnung gleich der Konsistenzordnung.	
4.	Die Größe des lokalen Abbruchfehlers sei $\mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$. Dann ist die Konsistenzordnung des Verfahrens p.	
5.	Es seien $y'(t) = t^3 y^2$, $t_0 = 1$ und $y^0 = y(t_0) = 2$. Berechnen Sie mit Euler-Verfahren eine Näherung y^1 von $y(t_0 + h)$ für $h = 0.1$.	