Aufgabe 2.18

Definition:

Eine Abbildung $||\cdot|| : R^n \to [0,\infty)$ heißt Norm, falls gilt:
1) $||v|| \geq 0,\ \forall\ v \in R^n$ (Nichtnegativität)
2) $||v|| = 0\ \Leftrightarrow\ v = 0$ (Definitheit)
3) $||\lambda v|| = |\lambda|||v||\ \forall\ v \in R^n,\ \lambda \in R$ (Homogenität)
4) $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||\ \forall\ v, w \in R^n$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung:

Eigentlich ist die erste Bedingung in der Definition überflüssig da $||\cdot|| : R^n \to [0,\infty) \iff ||v|| \geq 0,\ \forall\ v \in R^n$.

Zur Aufgabe:

i)
$x \to |x_1|$ ist keine Norm, denn die Definitheit ist verletzt.
Gegenbeispiel: Vektor $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aber $||v|| = |0| = 0$.

ii)
$x \to 5|x_1| + 2|x_2|$ ist eine Norm. Beweis: sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$.
1) Wegen $5|x_1| \geq 0,\ 2|x_2| \geq 0,\ \Rightarrow\ 5|x_1| + 2|x_2| \geq 0$ ist $||v|| \geq 0,\ \forall\ v \in R^n$.
2)$||v|| = 0 \iff 5|x_1| + 2|x_2| = 0 \iff 5|x_1| = 0$ und $2|x_2| = 0 \iff x_1 = 0$ und $x_2 = 0 \iff v = 0$.
3) $||\lambda v|| = 5|\lambda x_1| + 2|\lambda x_2| = 5|\lambda||x_1| + 2|\lambda||x_2| = |\lambda|(5|x_1| + 2|x_2|) = |\lambda|||v||$. $\Rightarrow$ Homogenität erfüllt.
4) $||v+w|| = 5|x_1+y_1| + 2|x_2+y_2| \leq 5|x_1| + 5|y_1| + 2|x_2| + 2|y_2| = ||v|| + ||w||$.

iii)
$x \to \max(4|x_1|, |x_2|)$ ist eine Norm. Beweis: analog zur Maximumnorm.

iv)
$x \to x_1 + x_2$ ist keine Norm da Definitheit verletzt ist.
Gegenbeispiel: Vektor $v := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aber $||v|| = -1 + 1 = 0$.

v)
$x \to \sqrt{x_1 + x_2}$ ist keine Norm da Definitheit verletzt ist.
Gegenbeispiel: Vektor $v := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aber $||v|| = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$.

vi)
$x \to \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist die Euklidische Norm. Beweis: sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$.
1) Wegen $x_1^2 \geq 0$ und $x_2^2 \geq 0$ ist $x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ und $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$ also $||v|| \geq 0$.
2) $||v|| = 0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0\ \Leftrightarrow\ x_1^2 + x_2^2 = 0\ \Leftrightarrow\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, also $\Leftrightarrow\ v = 0$.
3) $||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2)} = |\lambda|\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = |\lambda|||v||$.
4) $||v+w|| = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2} \overset{Minkowski}{\leq} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = ||v|| + ||w||$.

vii)
$x \to |x_1| + |x_2|$ ist eine Norm. Beweis: sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$.
1) $||v|| \geq 0 \iff |x_1| + |x_2| \geq 0 \iff |x_1| \geq 0$ und $|x_2| \geq 0$ klar.
2) $||v|| = 0 \iff |x_1| + |x_2| = 0 \iff |x_1| = 0$ und $|x_2| = 0$ auch klar.
3) $||\lambda v|| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda||x_1| + |\lambda||x_2| = |\lambda|(|x_1| + |x_2|) = |\lambda|||v||$.
4) $||v+w|| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = ||v|| + ||w||$.

viii)
$x \to \max(|x_1|, |x_2|)$ ist eine Norm. Beweis: sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$.
1) $||v|| \geq 0 \iff \max(|x_1|, |x_2|) \geq 0 \iff |x_1| \geq 0$ und $|x_2| \geq 0$ klar.
2) $||v|| = 0 \iff \max(|x_1|, |x_2|) = 0 \iff |x_1| = 0$ und $|x_2| = 0 \iff v = 0$.

3) $||\lambda v|| = \max(|\lambda x_1|, |\lambda x_2|) = \max(|\lambda||x_1|, |\lambda||x_2|) = |\lambda| \max(|x_1|, |x_2|) = |\lambda|||v||$.
4) $||v+w|| = \max(|x_1+y_1|, |x_2+y_2|) \le \max(|x_1|+|y_1|, |x_2|+|y_2|) \le \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|y_1|, |y_2|) = ||v|| + ||w||$.

Bemerkung:

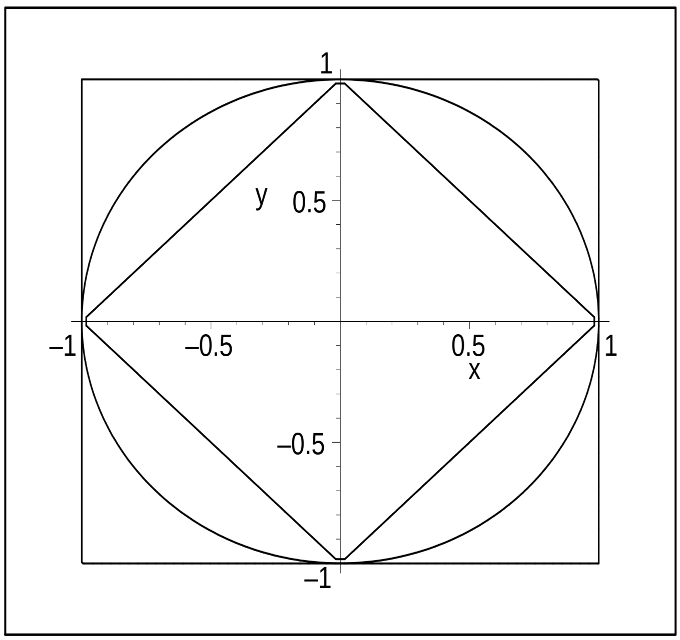
Vektornormen $||\cdot||_p,\ ||\cdot||_q \ \Rightarrow$ Operatornorm $||A||_{(p,q)} := \sup\limits_{||x||_p \neq 0} \frac{||Ax||_q}{||x||_p}$.

Es gilt $\frac{||Ax||_q}{||x||_p} \overset{||x||_p \neq 0}{\le} \sup\limits_{||x||_p \neq 0} \frac{||Ax||_q}{||x||_p} = ||A||_{(p,q)} \ \Leftrightarrow \ ||Ax||_q \le ||A||_{(p,q)} ||x||_p$ Verträglichkeit der Normen.

Ferner: $||AB||_{(p,q)} = \sup\limits_{||x||_p \neq 0} \frac{||(AB)x||_q}{||x||_p} \overset{assoziativ}{=} \sup\limits_{||x||_p \neq 0} \frac{||A(Bx)||_q}{||x||_p} \le \sup\limits_{||x||_p \neq 0} \frac{||A||_{(p,q)}||Bx||_q}{||x||_p} \le \sup\limits_{||x||_p \neq 0} \frac{||A||_{(p,q)}||B||_{(p,q)}||x||_p}{||x||_p} = ||A||_{(p,q)}||B||_{(p,q)}$.

D.h. durch Vektornormen $||\cdot||_p,\ ||\cdot||_q$ induzierte Operatornorm $||\cdot||_{(p,q)}$ ist automatisch eine Matrixnorm (d.h. $||AB||_{(p,q)} \le ||A||_{(p,q)}||B||_{(p,q)}$), wegen Assoziativität der Matrixmultiplikation.

Teil b) Der Plot der Einheitssphären



Teil c)
$||A||_{(2,2)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$ <u>Spektralnorm</u>.
$||A||_{(1,1)} = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{i,k}|$ <u>Spaltensummennorm</u>.
$||A||_{(\infty,\infty)} = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|$ <u>Zeilensummennorm</u>.