Aufgabe 2.20
Zunächst zeigen wir ((i) - (iv))

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty$$

Zu (i): Sei $\|x\|_\infty = |x_I|$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq I}}^{n} x_i^2 + x_I^2} \geq \sqrt{x_I^2} \geq |x_I| = \|x\|_\infty$$

Zu (ii): (Wir zeigen $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |x_i||x_j| = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i||x_j| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2$$

Zu (iii): (Wir zeigen $\|x\|_1^2 \leq n\,\|x\|_2^2$)
Vorab: Wegen $(|x_i| - |x_j|)^2 \geq 0$ gilt $|x_i|^2 + |x_j|^2 \geq 2\,|x_i||x_j|$.

$$\|x\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |x_i||x_j| = \|x\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2\,|x_i|\,|x_j| \leq \|x\|_2^2 + (n-1) \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = n\,\|x\|_2$$

Zu (iv): (Wir zeigen $\|x\|_2^2 \leq n\,\|x\|_\infty^2$
Sei wieder $\|x\|_\infty = |x_{\hat{i}}|$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq n\,x_{\hat{i}}^2 = n\,\|x\|_\infty^2$$

Zeige nun , dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

a.) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

b.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

c.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$

d.) $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$.

Zu a)): Es sei ρ der größte Eigenwert von $A^T A$ und z der/ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist:

$$\|A\|_2^2\,\|\,z\,\|_1 = \rho\,\|\,z\,\|_1 = \|\rho\,z\|_1 = \left\|A^T A\,z\right\|_1 \leq \left\|A^T A\right\|_1\,\|z\|_1 \leq \left\|A^T\right\|_1\,\|A\|_1\,\|z\|_1 = \|A\|_\infty\,\|A\|_1\,\|z\|_1$$

Division durch $\|z\|_1$ und Wurzelziehen liefert die Behauptung.

Alle anderen Ungleichungen – b) bis d) – beweist man wie folgt: (hier für c))

Sei z mit $\|\,z\,\|_\infty = 1$ und $\|\,A\,\|_\infty = \|\,A\,z\,\|_\infty$ gegeben. Dann ist

$$\|\,A\,\|_\infty = \|\,A\,z\,\|_\infty \overset{(i)}{\leq} \frac{\|\,A\,z\,\|_2}{\|\,z\,\|_\infty} \overset{(iv)}{\leq} \frac{\|\,A\,z\,\|_2}{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|\,z\,\|_2} \leq \sqrt{n}\,\max_{z\neq 0}\left\{\frac{\|\,A\,z\,\|_2}{\|\,z\,\|_2}\right\} = \sqrt{n}\,\|\,A\,\|_2$$

Sei z mit $\|\,z\,\|_2 = 1$ und $\|\,A\,\|_2 = \|\,A\,z\,\|_2$ gegeben. Dann ist

$$\|\,A\,\|_2 = \|\,A\,z\,\|_2 \overset{(iv)}{\leq} \sqrt{n}\,\frac{\|\,A\,z\,\|_\infty}{\|\,z\,\|_2} \overset{(i)}{\leq} \sqrt{n}\,\frac{\|\,A\,z\,\|_\infty}{\|\,z\,\|_\infty} \leq \sqrt{n}\,\max_{z\neq 0}\left\{\frac{\|\,A\,z\,\|_\infty}{\|\,z\,\|_\infty}\right\} = \sqrt{n}\,\|\,A\,\|_\infty$$