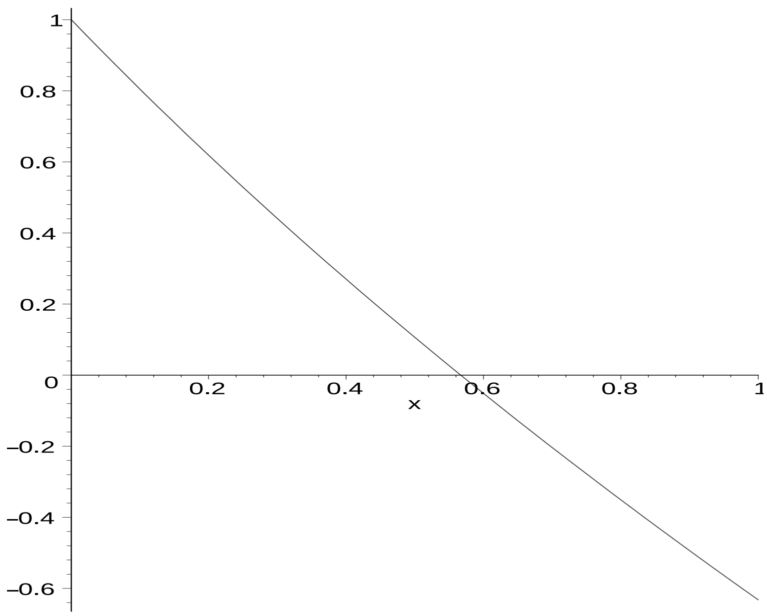
Aufgabensammlung Numerik für Ingenieure A 5.2: Nullstellen (skalar) Bisektion

$$f := x \to e^{(-x)} - x$$

$$f' := x \to -e^{(-x)} - 1$$

$f'(x) < 0$: also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ (dort ist f stetig) monoton fallend $\to$ höchstens eine Nulsttelle.
Skizze hilft, also: Wertetabelle!

x	0	.2	.4	.6	.8	1.0
f	1	.618731	.27032	-.051188	-.350671	-.632121



Wähle Startwerte $x_0 := 0$ und $x_1 := 1.0$ (oder $x_0 := 0.4$ und $x_1 := 0.6$) für Einschluss. Nun wird solange iteriert, bis $|x_{i-1} - x_i| \leq 0.01 = \varepsilon$ ist. Da der Abstand in jedem Schritt halbiert wird. läßt sich die Anzahl der Iterationen n vorher, nur mit Kenntnis von $x_0 - x_1$ und ε, bestimmen.

$$|x_{\tilde{n}} - x_{\tilde{n}-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\tilde{n}-1} |x_1 - x_0| \overset{!}{\leq} \varepsilon \Rightarrow \tilde{n} \geq 1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \ln \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = 7.6... \to n = 8$$

Die Iterationsvorschrift lautet ($f_i = f(x_i)$)

for $i = 2$ to n
  $x_i = \dfrac{x_{i-1} + x_{i-2}}{2}$
  if $f_i \cdot f_{i-1} > 0$ then $x_{i-1} = x_{i-2}$
end i

i	x_i	f_i	$x_{i-1} = x_{i-2}$?
0	0	1	entfällt
1	1.0	$-.632121$	entfällt
2	.50	.106531	*nein*
3	.750	$-.277633$	*nein*
4	.6250	$-.089739$	*ja*
5	.56250	.007283	*nein*
6	.59375	$-.041498$	*nein*
7	.578125	$-.017176$	*ja*
8	.570313	$-.004964$	*ja*

Fixpunktverfahren

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir $f(x) = 0$ in $x = F(x)$ umwandeln und ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ finden, das durch F in sich abgebildet wird, und auf dem F kontraktiv ist. Letzteres ist erfüllt, falls ein $\alpha < 1$ existiert mit $|F'(x)| \le \alpha$ für alle $x \in [a, b]$.
Tip: Meistens zeigt man im ersten Schritt, dass das Intervall $I = [a, b]$ auf ein Teilintervall $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset I$ (mehrdimensional das Gebiet D auf $\tilde{D} \subset D$) abgebildet wird. Wenn ein Fixpunkt existiert, dann kann dieser nur in $\tilde{I}$ ($\tilde{D}$) liegen. Es genügt also, die Kontraktivität in $\tilde{I}$ ($\tilde{D}$) nachzuweisen. Für entsprechende Fehlerabschätungen muss dann aber auch konsequenterweise ein Startwert aus $\tilde{I}$ ($\tilde{D}$) gewählt werden.

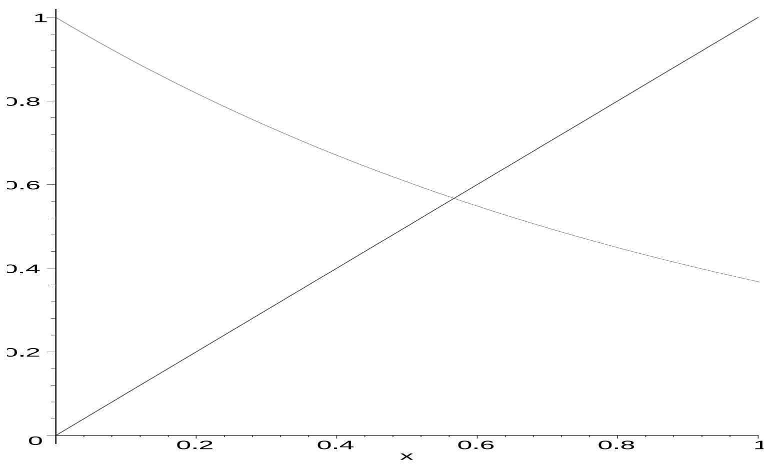
$$F := x \to e^{(-x)}$$

$$F' := x \to -e^{(-x)}$$

$$F'' := x \to e^{(-x)}$$

Skizze ($y = x$ und $y = F(x)$) gemäß folgender Wertetabelle:

x	0	.2	.4	.6	.8	1.0
f	1	.818731	.67032	.548812	.449329	.367879



Wir versuchen die Vorausetzungen für das abgeschlossene Intervall $I = [0.0, 1.0]$ nachzuweisen.
Abbildung in sich:
Für $x \in I$ ist $F(x)$ streng monoton fallend ($F'(x) < 0$ auf I), also reicht es, wenn wir die Randwerte untersuchen (sonst Extrema bestimmen).

$$F(I) = [F(1), F(0)] = [0.3678791, 1] \subset [0.367, 1] =: \tilde{I}$$

Also wird I in sich abgebildet

kontraktiv:
Hier wählen wir direkt $\tilde{I}$ als Intervall. (Bei 0 hätten wir sonst auch ein Problem.) : $F'(x) < 0 \wedge F''(x) > 0$, also ist $\max_{x \in \tilde{I}} |F'(x)| = -F'(0.367) = 0.6928$ und wir setzen $\alpha := 0.693$.

Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0| \overset{!}{=} \varepsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\varepsilon = 1e - 2$ und $x_0 = 0.5$ ($\in \tilde{I}$, s.o.) ergibt diese Formel $\tilde{n} = 9.6...$ Also ist es hinreichend, 10 Iterationen auszuführen.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= .606531\\
x_2 &= .545239\\
x_3 &= .579703\\
x_4 &= .560065\\
x_5 &= .571172\\
x_6 &= .564863\\
x_7 &= .568438\\
x_8 &= .566409\\
x_9 &= .56756\\
x_{10} &= .566907
\end{aligned}
$$

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_{10} - \overline{x}| \leq 0.0014727.. \leq 0.001473$$

Die höhere Genauigkeit resultiert aus den, bezogen auf die komplette Iteration, zu pessimistischem α. Am Ende der Iteration ist die Kontraktionszahl auf ungefähr 0.5673 gesunken. Allgemein kann man dies aber **nicht** schließen

Newtonverfahren
Erklärungen, Skizze und Startwerte siehe auch Bisektion

$$f := x \to e^{(-x)} - x \to f' := x \to -e^{(-x)} - 1$$

Startwert: $x_0 := 0.5$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet):

$$
\begin{array}{llll}
f_0 = 1.0653066e-01 & f_0' = -1.6065307e+00 & \Delta x_0 = -6.6311003e-02 & x_1 = 5.6631100e-01\\
f_1 = 1.3045098e-03 & f_1' = -1.5676155e+00 & \Delta x_1 = -8.3216184e-04 & x_2 = 5.6714317e-01
\end{array}
$$

Wir stoppen die Iteration, wenn $|\Delta x_i| < \varepsilon$ erfüllt ist und testen einen Einschluss (Newton-Verfahren konvergiert lokal monoton, d.h.: x_n lokal monoton); dazu wird f an den Stellen x_n und $x_n \pm \varepsilon$ ausgewertet:

$$f(x_2) = 0.196e-6 \quad \text{und} \quad f(x_2 + 0.01) = -0.0156$$

Einschluss gegeben, also x_2 genügend genau.
Bem.: Bereits x_1 war genau genug. Meistens ist Δx_i ein guter Fehlerschätzer zur vorherigen Iterierten.

Sekantenverfahren
Erklärungen, Skizze und Startwerte siehe auch Bisektion

$$f := x \to x \to e^{(-x)} - x$$

Startwerte: $x_0 := 0$ und $x_1 := 1.0$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet) mit $f(x_0) = 1$ und $f(x_1) = -0.6321205588$ sowie dem Abbruchkriterium: $|\Delta x_i| < \varepsilon$ und f_{i+1} und f_i bilden einen Einschluss; m ist die *Sekantensteigung*:

$$
\begin{array}{llll}
m = -1.6321206 & \Delta x_1 = +3.8730016e-01 & x_2 = 6.1269984e-01 & f_2 = -7.0813948e-02\\
m = -1.4492806 & \Delta x_2 = +4.8861448e-02 & x_3 = 5.6383839e-01 & f_3 = +5.1823545e-03\\
m = -1.5553428 & \Delta x_3 = -3.3319693e-03 & x_4 = 5.6717036e-01 & f_4 = -4.2419242e-05
\end{array}
$$

Es kann sein, dass zu lange iteriert wird, wenn die Bedingung mit dem Einschluss gerade nicht erfüllt ist.