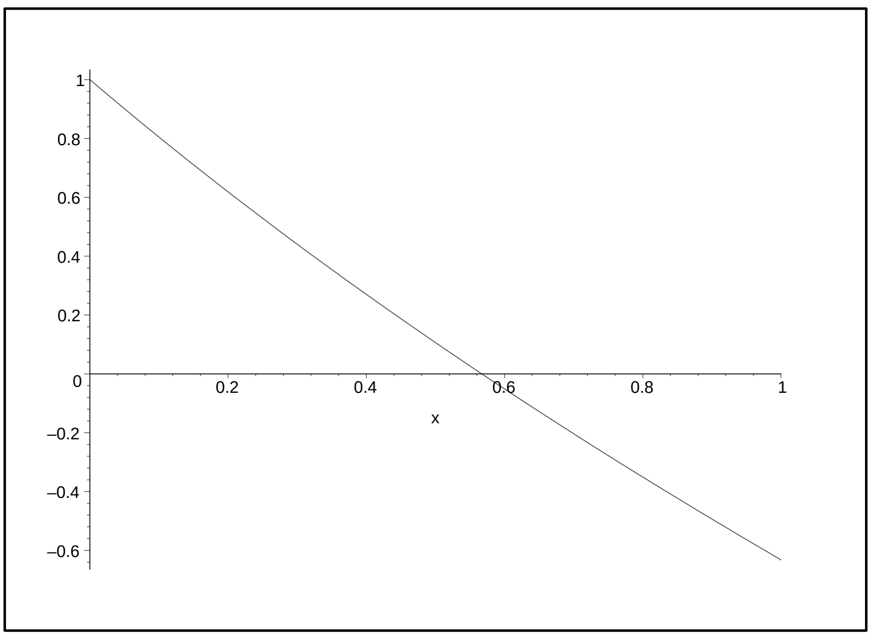
Aufgabe 5.2 erste Funktion

Bisektion

$$f := x \to e^{(-x)} - x$$
$$f' := x \to -e^{(-x)} - 1$$

$f'(x) < 0$: also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ höchstens eine Nullstelle.
Skizze hilft, also: Wertetabelle!

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f	1	0.618731	0.27032	−0.051188	−0.350671	−0.632121



Wähle Startwerte $x_0 := 0$ und $x_1 := 1.0$ (oder $x_0 := 0.4$ und $x_1 := 0.6$) für Einschluss. Nun wird solange iteriert, bis $|x_{i-1} - x_i| \leq 0.01 = \epsilon$ ist. Da der Abstand in jedem Schritt halbiert wird, lässt sich die Anzahl der Iterationen $n - 1$ vorher, nur mit Kenntnis von $|x_0 - x_1|$ und ϵ, bestimmen.

$$|x_{\tilde{n}} - x_{\tilde{n}-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\tilde{n}-1} |x_1 - x_0| \overset{!}{\leq} \epsilon \;\Rightarrow\; \tilde{n} \geq 1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \ln \frac{\epsilon}{|x_1 - x_0|} = 7.6\ldots \;\Rightarrow\; n = 8.$$

Die Iterationsvorschrift lautet ($f_i = f(x_i)$)

for $i = 2$ to n

$\quad x_i = \frac{x_{i-1}+x_{i-2}}{2}$

$\quad$ if $f_i \cdot f_{i-1} > 0$ then $x_{i-1} = x_{i-2}$

end i

x	x_i	f_i	$x_{i-1} = x_{i-2}$?
0	0	1	entfällt
1	1.0	−0.632121	entfällt
2	0.50	0.106531	nein
3	0.750	−0.277633	nein
4	0.6250	−0.089739	ja
5	0.56250	0.007283	nein
6	0.59375	−0.041498	nein
7	0.578125	−0.017176	ja
8	0.570313	−0.004964	ja

Bem.: aktuelles Intervall besteht aus dem neu berechneten x_i und dem alten x_j, das eine Zeile vor dem letzten „nein“steht.

Fixpunktverfahren

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir $f(x) = 0$ in $x = F(x)$ umwandeln und ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ finden, das durch F in sich abgebildet wird, und auf dem F kontraktiv ist. Letzteres ist erfüllt, falls ein $\alpha < 1$ existiert mit $|F'(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in [a, b]$.

Tip: Meistens zeigt man im ersten Schritt, dass das Intervall $I = [a, b]$ auf ein Teilintervall $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset I$ (mehrdimensional das Gebiet D auf $\tilde{D} \subset D$) abgebildet wird. Wenn ein Fixpunkt existiert, dann kann dieser nur in $\tilde{I}$ ($\tilde{D}$) liegen. Es genügt also, die Kontraktivität in $\tilde{I}$ ($\tilde{D}$) nachzuweisen. Für entsprechende Fehlerabschätzungen muss dann aber auch konsequenterweise ein Startwert aus $\tilde{I}$ ($\tilde{D}$) gewählt werden.
D.h. wenn ein bestimmter Startwert gefordert ist, darf man $\tilde{D}$ nur so gross wählen, dass er noch in $\tilde{D}$ liegt (oder muss n um 1 erhöhen)!

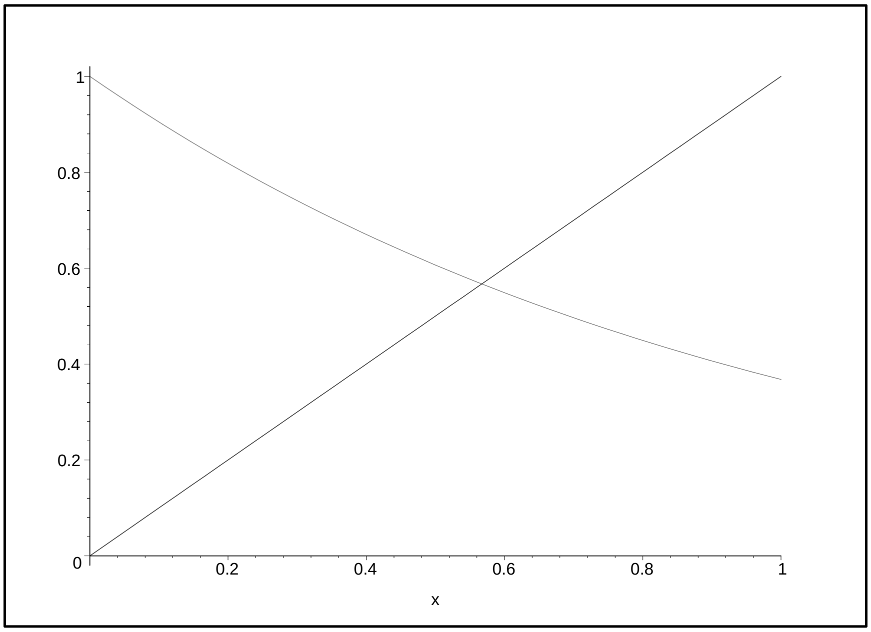
$F := x \to e^{(-x)}$

$F' := x \to -e^{(-x)}$ (für Monotonie Selbstabbildung)

$F'' := x \to e^{(-x)}$ (für Monotonie Jakobische, d.h. Kontraktivitätsüberlegung)

Skizze ($y = x$ und $y = F(x)$) gemäß folgender Wertetabelle:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f	1	0.818731	0.67032	0.548812	0.449329	0.367879



Wir versuchen die Vorausetzungen für das abgeschlossene Intervall $I = [0.0, 1.0]$ nachzuweisen.
Abbildung in sich: Für $x \in I$ ist $F(x)$ streng monoton fallend ($F'(x) < 0$ auf I), also reicht es, wenn wir die Randwerte untersuchen (sonst Extrema bestimmen).

$$F(I) = [F(1), F(0)] = [0.3678791, 1] \subset [0.367, 1] =: \tilde{I}$$

Also wird I in sich abgebildet.

kontraktiv: Hier wählen wir direkt $\tilde{I}$ als Intervall. (Bei 0 hätten wir sonst auch ein Problem weil $F'(0) = 1$ d.h. nicht kontraktiv.): $F'(x) < 0 \wedge F''(x) > 0$, also ist $\max_{x \in \tilde{I}} |F'(x)| = -F'(0.367) = 0.6928$ und wir setzen $\alpha := 0.693$.

Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \epsilon$$

führt auf

$$n \geq \frac{\ln \frac{\epsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)} =: \tilde{n}$$

Mit $\epsilon = 0.01$ und $x_0 = 0.5$ ($\in \tilde{I}$, s.o.) ergibt diese Formel $\tilde{n} = 9.6\ldots$ Also ist es hinreichend, 10 Iterationen auszuführen.

$$x_1 = 0.606531,\ x_2 = 0.545239,\ x_3 = 0.579703,\ x_4 = 0.560065,\ x_5 = 0.571172$$
$$x_6 = 0.564863,\ x_7 = 0.568438,\ x_8 = 0.566409,\ x_9 = 0.56756,\ x_{10} = 0.566907$$

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_{10} - \bar{x}| \leq 0.0014727\ldots \leq 0.001473$$

Die höhere Genauigkeit resultiert aus den, bezogen auf die komplette Iteration, zu pessimistischem α. Am Ende der Iteration ist die Kontraktionszahl auf ungefähr 0.5673 gesunken. Allgemein kann man dies aber nicht schließen.

Newtonverfahren

Erklärungen, Skizze und Startwerte siehe Bisektion

$$f := x \to e^{(-x)} - x$$
$$f' := x \to -e^{(-x)} - 1$$

Startwert: $x_0 := 0.5$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet):

$$f_0 = 0.10653066 \; f'_0 = -1.6065307 \; \Delta_x = -0.066311003 \; x_1 = 0.56631100$$

$$f_1 = 0.0013045098 \; f'_1 = -1.5676155 \; \Delta_x = -0.00083216184 \; x_2 = 0.56714317$$

Wir stoppen die Iteration, wenn $|\Delta x_i| < \epsilon$ erfüllt ist und testen einen Einschluss (Newton-Verfahren konvergiert lokal monoton, d.h.: x_n lokal monoton); dazu wird f an den Stellen x_n und $x_n \pm \epsilon$ ausgewertet:

$$f(x_2) = 0.196 \cdot 10^{-6} > 0 \text{ und } f(x_2 + 0.01) = -0.0156 < 0$$

Einschluss gegeben, also x_2 genügend genau.
Bem.: Bereits x_1 war genau genug. Meistens ist Δx_i ein guter Fehlerschätzer zur <u>vorherigen</u> Iterierten, denn $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \approx \bar{x} - x_i$ wegen quadratischer Konvergenz:

$$\|x_{i+1} - \bar{x}\| \leq c\|x_i - \bar{x}\|^2 << \|x_i - \bar{x}\|$$

Sekantenverfahren

Erklärungen, Skizze und Startwerte siehe Bisektion

$$f := x \to e^{(-x)} - x$$

Startwerte: $x_0 := 0$ und $x_1 := 1.0$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet) mit $f(x_0) = 1$ und $f(x_1) = -0.6321205588$ sowie dem Abbruchkriterium: $|\Delta x_i| < \epsilon$ und f_{i+1} und f_i bilden einen Einschluss; m ist die *Sekantensteigung* $m = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$:

$$\begin{array}{llll} m = -1.6321206 & \Delta_x = 0.38730016 & x_2 = 0.61269984 & f_2 = -0.070813948 \\ m = -1.4492806 & \Delta_x = 0.048861448 & x_3 = 0.56383839 & f_3 = 0.0051823545 \\ m = -1.5553428 & \Delta_x = -0.0033319693 & x_4 = 0.56717036 & f_4 = -0.000042419242 \end{array}$$

Es kann sein, dass eigentlich zu lange iteriert wird, wenn die Bedingung mit dem Einschluss gerade nicht erfüllt ist.