Aufgabe 5.9

$F(x) = \tan(x - 0.5)$
$\to\ F'(x) = \frac{1}{\cos^2(x-0.5)}(\geq 1) = \frac{\sin^2(x-0.5)+\cos^2(x-0.5)}{\cos^2(x-0.5)} = 1 + \tan^2(x - 0.5) \geq 1.$
F ist folglich nicht kontraktiv, also: Umkehrfunktion betrachten, d.h. Spiegelung an erster Winkelhalbierenden.
$\Phi(x) = 0.5 + \arctan(x)\ \to\ \Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\Longrightarrow\ \Phi'$ ist streng monoton fallend in $[0, \infty)$
Wertetabelle und Skizze:

x_i	0	0.5	1.0	1.5
$\Phi(x_i)$	0.5	0.9636	1.2854	1.4828

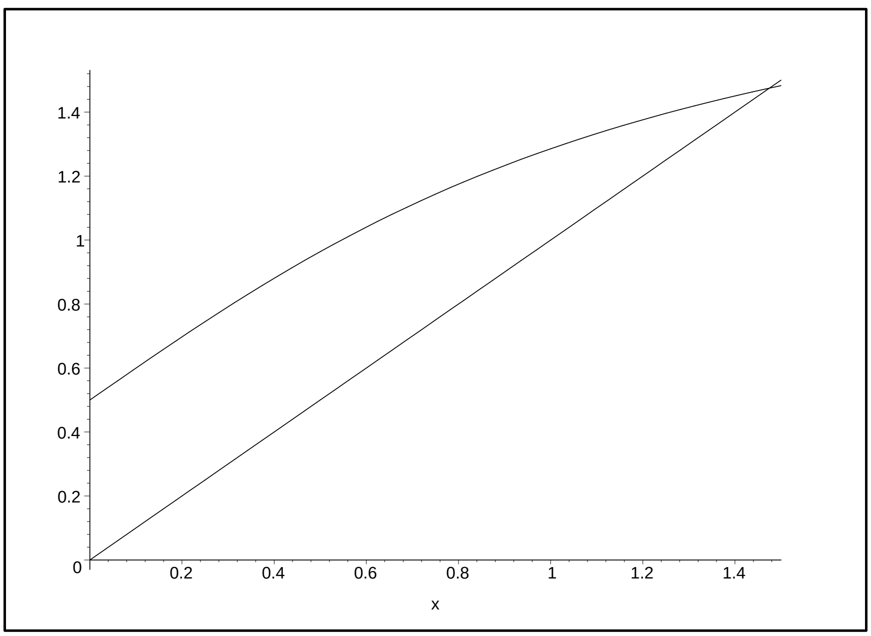

Abbildung in sich:
Wegen $\Phi'(x) > 0$ ist Φ streng monoton steigend. Es reicht also eine Randwertuntersuchung auf dem Intervall $I = [0, 1.5]$. Aus obiger Wertetabelle geht unmittelbar hervor, dass $F(I) \subset [0.5, 1.5] =: J \subset I$ ist. **Achtung:** aus der Wertetabelle darf man nur folgern, wenn die Funktion **monoton** ist!

Kontraktivität:
Wenn ein Fixpunkt vorliegt, dann nur in dem **abgeschlossenen** Intervall J. Dort ist $\Phi'(x) > 0$ und streng monoton fallend. Folglich ist dort $|\Phi'(x)| \leq \Phi'(0.5) = 0.8 < 1$.

Damit existiert also auf J genau ein Fixpunkt. Wegen obiger Wertetabelle und der Monotonie von Φ wird auch $\tilde{I} := [1.2, 1.5]$ in sich abgebildet. Dort gilt $|\Phi'(x)| \leq \Phi'(1.2) =$

$0.40\ldots \underbrace{<}_{\text{niemals abrunden!}} 0.41 =: \alpha < 1$. $\tilde{I}$ statt I reduziert also α von 0.8 auf 0.41.

Die a-priori Abschätzung:
(erste beiden Iterationen)

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \epsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \frac{\epsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\epsilon = 0.01$ und $x_0 = 1.5 \quad \rightarrow \quad x_1 = F(x_0) = 1.4828$ (Wertetabelle) ergibt diese Formel $\tilde{n} = 1.2\ldots$ also ist es hinreichend, 2 Iterationen auszuführen.

$$x_2 = 1.47746$$

Die a-posteriori Abschätzung:
(letzte beiden Iterationen)

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann:

$$|x_2 - \bar{x}| \leq 0.0037\ldots < 0.0038$$

Also (wie häufig) genauer als gefordert (0.01), weil (zumindest hier) $|\Phi'(\bar{x})| < \alpha$ gilt, so dass die Kontraktion im Fixpunkt besser als bei den Abschätzungen ist.