Numerik für Maschinenbauer SS2013 IGPM

Lösungsvorschlag Aufgabe 8.1 mit diversen Verfahren

Das Angangswertproblem lautet:

$$y'(t) = t \cdot y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 = 1.$$

Expliziter Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

Startwerte: $a = t_0$= 0.0, y_0= 1.0; $f(t, y) = t \cdot y$.
Mit $b = t_n$= 1.0 und h= 0.2 ergibt das 5 Schritte.

i	t_i	$f(t_i, y_i)$	y_{i+1}
0	0.0000	0.0000	1.0000
1	0.2000	0.2000	1.0400
2	0.4000	0.4160	1.1232
3	0.6000	0.6739	1.2580
4	0.8000	1.0064	1.4593

Impliziter Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Startwerte und Anzahl der Schritte siehe expliziter Euler.
Da die Dgl. linear in y ist ($y'(t) = A(t) \cdot y(t) + V(t)$, hier zudem noch $V(t) = 0$), können wir nach y_{i+1} auflösen

$$y_{i+1} = \frac{1}{1 - h \cdot A(t_{i+1})} \cdot y_i = a(h, t_{i+1}) \cdot y_i$$

Hier ist

$$a(h, t_{i+1}) = \frac{1}{1 - h \cdot t_{i+1}}$$

i	t_{i+1}	$a(h, t_{i+1})$	y_{i+1}
0	0.2000	1.0417	1.0417
1	0.4000	1.0870	1.1322
2	0.6000	1.1364	1.2866
3	0.8000	1.1905	1.5317
4	1.0000	1.2500	1.9146

Trapezregel:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}))$$

Startwerte und Anzahl der Schritte siehe expliziter Euler.
Da die Dgl. linear in y ist, können wir nach y_{i+1} auflösen

$$a(h, t_{i+1}) \cdot y_{i+1} = b(h, t_i) \cdot y_i$$

mit

$$a(h, t_{i+1}) = 1 - \frac{h}{2} \cdot t_{i+1}$$

und

$$b(h,t_i) = 1 + \frac{h}{2} \cdot t_i$$

liefert

$$y_{i+1} = \frac{b(h,t_i)}{a(h,t_{i+1})} \cdot y_i$$

i	t_{i+1}	$a(h,t_{i+1})$	$b(h,t_i)$	y_{i+1}
0	0.2000	0.9800	1.0000	1.0204
1	0.4000	0.9600	1.0200	1.0842
2	0.6000	0.9400	1.0400	1.1995
3	0.8000	0.9200	1.0600	1.3821
4	1.0000	0.9000	1.0800	1.6585

Verbesserter Euler:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2} \cdot k_1) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2 \end{aligned}$$

Startwerte und Anzahl der Schritte siehe expliziter Euler.

i	t_i	k_1	k_2	y_{i+1}
0	0.0000	0.0000	0.1000	1.0200
1	0.2000	0.2040	0.3121	1.0824
2	0.4000	0.4330	0.5629	1.1950
3	0.6000	0.7170	0.8867	1.3723
4	0.8000	1.0979	1.3339	1.6391

***Klassisches* Runge-Kutta-Verfahren:**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2} \cdot k_1) \\ k_3 &= f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2} \cdot k_2) \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + h \cdot k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Startwerte und Anzahl der Schritte siehe expliziter Euler.

i	t_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0.00000	0.00000	0.10000	0.10100	0.20404	1.02020
1	0.20000	0.20404	0.31218	0.31543	0.43331	1.08329
2	0.40000	0.43331	0.56331	0.56981	0.71835	1.19722
3	0.60000	0.71833	0.88834	0.90024	1.10181	1.37713
4	0.80000	1.10170	1.33857	1.35988	1.64910	1.64872

Zum Vergleich (exakte Lösung ist $y(t) = e^{0.5 \cdot t^2}$):

$$\begin{aligned} y(1) \approx y_5 = &\quad 1.64871667669314 \\ y(1) = e^{0.5} = &\quad 1.64872127070013 \end{aligned}$$

Adams-Bashforth: 2-Schritt-Verfahren 2. Ordnung

$$y_{i+1} \quad = \quad y_i + \tfrac{h}{2} \cdot (3 \cdot f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}))$$

oder kurz

$$y_{i+1} \quad = \quad y_i + \tfrac{h}{2} \cdot \left(3 \cdot y_i' - y_{i-1}'\right)$$

Startwerte und Anzahl der Schritte siehe expliziter Euler.
Wir müssen aber noch einen weiteren Wert aus dem verbesserten Euler-Verfahren übernehmen.

i	t_i	y_i'	y_{i+1}
0	0.0000	0.0000	1.0200
1	0.2000	0.2040	1.0812
2	0.4000	0.4325	1.1905
3	0.6000	0.7143	1.3616
4	0.8000	1.0893	1.6169

Adams-Moulton: 2-Schritt-Verfahren 3. Ordnung

$$y_{i+1} \quad = \quad y_i + \tfrac{h}{12} \cdot (5 \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 8 \cdot f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}))$$

oder kurz

$$y_{i+1} \quad = \quad y_i + \tfrac{h}{12} \cdot \left(5 \cdot y_{i+1}' + 8 \cdot y_i' - y_{i-1}'\right)$$

Startwerte und Anzahl der Schritte siehe expliziter Euler.
Wir müssen aber noch einen weiteren Wert aus dem klassischen Kutta-Verfahren übernehmen.
Eigentlich würde hier ein Verfahren dritter Ordnung genügen. Da wir aber die Werte des kl. RKV bereits haben, nehmen wir diese.
Da die Dgl. linear in y ist ($y'(t) = A(t) \cdot y(t)$), können wir nach y_{i+1} auflösen

$$y_{i+1} \quad = \quad y_i + \tfrac{h}{12} \cdot \left(5 \cdot A(t_{i+1}) \cdot y_{i+1} + 8 \cdot y_i' - y_{i-1}'\right)$$

führt uns auf

$$\begin{aligned} y_{i+1} \quad &= \quad \frac{y_i + \frac{h}{12} \cdot \left(8 \cdot y_i' - y_{i-1}'\right)}{1 - \frac{5}{12} \cdot h \cdot A(t_{i+1})} \\ &= \quad a(h, t_{i+1}) \cdot \left(y_i + \tfrac{h}{12} \cdot \left(8 \cdot y_i' - y_{i-1}'\right)\right) \end{aligned}$$

Hier ist

$$a(h, t_{i+1}) = \frac{1}{1 - \frac{5}{12} \cdot h \cdot t_{i+1}}$$

i	t_{i+1}	$a(h, t_{i+1})$	y_i'	y_{i+1}
0	0.2000	—	0.0000	1.0202
1	0.4000	1.0345	0.2040	1.0835
2	0.6000	1.0526	0.4334	1.1978
3	0.8000	1.0714	0.7187	1.3783
4	1.0000	1.0909	1.1026	1.6509