Numerik für Maschinenbauer SS2013 IGPM

Lösungsvorschlag Aufgabe 8.2 mit diversen Verfahren

Die lineare Differentialgleichung lautet:

$$y''(t) = -t \cdot y'(t) - 2 \cdot y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = 1$$

Dies führt auf das System

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -t \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da dies linear in $\mathbf{y}$ ist, führt ein implizites Verfahren auf ein lineares Gleichungssytem.

Expliziter Euler:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

Startwerte: $a = t_0 = 0.0$, $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$.
Mit $b = t_n = 1.0$ und $h = 0.25$ ergibt das 4 Schritte

i	t_i	$f(t_i, y_i)$	$\mathbf{y}_{i+1}$
0	0.00	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ -2.0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2500 \\ 0.5000 \end{pmatrix}$
1	0.25	$\begin{pmatrix} 0.5000 \\ -2.6250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.3750 \\ -0.1563 \end{pmatrix}$
2	0.50	$\begin{pmatrix} -0.1563 \\ -2.6719 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.3359 \\ -0.8242 \end{pmatrix}$
3	0.75	$\begin{pmatrix} -0.8242 \\ -2.0537 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1299 \\ -1.3376 \end{pmatrix}$

Verbesserter Euler:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}\,(t_i, \mathbf{y}_i) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{f}\left(t_i + \tfrac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \tfrac{h}{2}\,\mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{K}_2 \end{aligned}$$

Startwerte: $a = t_0 = 0.0000$, $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$.
Mit $b = t_n = 1.0000$ und $h = 0.2500$ ergibt das 4 Schritte

i	t_i	$\mathbf{K}_1$	$\mathbf{K}_2$	$\mathbf{y}_{i+1}$
0	0.0000	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ -2.0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7500 \\ -2.3438 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1875 \\ 0.4141 \end{pmatrix}$
1	0.2500	$\begin{pmatrix} 0.4141 \\ -2.4785 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1042 \\ -2.5176 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2136 \\ -0.2153 \end{pmatrix}$
2	0.5000	$\begin{pmatrix} -0.2153 \\ -2.3195 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.5053 \\ -2.0575 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0872 \\ -0.7297 \end{pmatrix}$
3	0.7500	$\begin{pmatrix} -0.7297 \\ -1.6272 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.9331 \\ -1.1756 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8540 \\ -1.0236 \end{pmatrix}$

Impliziter Euler:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})$$

Startwerte und Anzahl Schritte siehe expliziter Euler.
Da die Dgl. linear in $\mathbf{y}$ ist ($\mathbf{y}'(t) = A(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{V}(t)$), können wir ein lineares Gleichungssystem für $\mathbf{y}_{i+1}$ aufstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h \cdot (A(t_{i+1}) \cdot \mathbf{y}_{i+1} + \mathbf{V}(t_{i+1})) \\ (E - h \cdot A(t_{i+1})) \cdot \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{V}(t_{i+1}) \\ a(h, t_{i+1}) \cdot \mathbf{y}_{i+1} &= \tilde{\mathbf{y}}_i \end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} a(h, t_{i+1}) &= \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 2 \cdot h & 1 + h \cdot t_{i+1} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{y}}_i &= \mathbf{y}_i + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i	t_{i+1}	$a(h, t_{i+1})$	$\mathbf{y}_{i+1}$
0	0.2500	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.2500 \\ 0.5000 & 1.0625 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1053 \\ 0.4211 \end{pmatrix}$
1	0.5000	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.2500 \\ 0.5000 & 1.1250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0789 \\ -0.1053 \end{pmatrix}$
2	0.7500	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.2500 \\ 0.5000 & 1.1875 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9561 \\ -0.4912 \end{pmatrix}$
3	1.0000	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.2500 \\ 0.5000 & 1.2500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7799 \\ -0.7049 \end{pmatrix}$

Trapezregel:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}))$$

Startwerte und Anzahl Schritte siehe expliziter Euler.
Da die Dgl. linear in $\mathbf{y}$ ist ($\mathbf{y}'(t) = A(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{V}(t)$), können wir ein lineares Gleichungssystem für $\mathbf{y}_{i+1}$ austellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{2} \cdot (A(t_i) \cdot \mathbf{y}_i + \mathbf{V}(t_i) + A(t_{i+1}) \cdot \mathbf{y}_{i+1} + \mathbf{V}(t_{i+1})) \\ (E - \tfrac{h}{2} \cdot A(t_{i+1})) \cdot \mathbf{y}_{i+1} &= (E + \tfrac{h}{2} \cdot A(t_i)) \cdot \mathbf{y}_i + \tfrac{h}{2} \cdot (\mathbf{V}(t_i) + \mathbf{V}(t_{i+1}) \\ a(h, t_{i+1}) \cdot \mathbf{y}_{i+1} &= b(h, t_i) \cdot \mathbf{y}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} a(h, t_{i+1}) &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ h & 1 + \frac{h}{2} \cdot t_{i+1} \end{pmatrix} \\ b(h, t_i) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ -h & 1 - \frac{h}{2} \cdot t_i \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{v}}_i &= \frac{h}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i	t_{i+1}	$a(h, t_{i+1})$	$b(h, t_i)$	$\mathbf{y}_{i+1}$
0	0.25	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.1250 \\ 0.2500 & 1.0313 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1250 \\ -0.2500 & 1.0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1801 \\ 0.4412 \end{pmatrix}$
1	0.50	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.1250 \\ 0.2500 & 1.0625 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1250 \\ -0.2500 & 0.9688 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2151 \\ -0.1613 \end{pmatrix}$
2	0.75	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.1250 \\ 0.2500 & 1.0938 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1250 \\ -0.2500 & 0.9375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1112 \\ -0.6700 \end{pmatrix}$
3	1.00	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -0.1250 \\ 0.2500 & 1.1250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1250 \\ -0.2500 & 0.9063 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9040 \\ -0.9876 \end{pmatrix}$