NumaMB Donnerstag 20. August 2015

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3+\lambda \\ 2\,\lambda & \lambda+4 & 5\,\lambda+3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 17+3\,\lambda \\ 17+19\,\lambda \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung, und bestätigen Sie, dass man das Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ lösen kann.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3+\lambda \\ 2\lambda & \lambda+4 & 3+5\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 4 & 3+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$\det(A) = \det(L\,R) = \det(L)\,\det(R) = 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 12.$$

Offensichtlich ist damit $\det(A) \neq 0$, und das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.

c) Es gilt:

$$A\,x = b \Leftrightarrow L\,R\,x = b$$

Substituiere $R\,x = y$ und löse $L\,y = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 13 \\ 3\lambda+17 \\ 19\lambda+17 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 13 \\ 3\lambda+4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 13 \\ 3\,\lambda+4 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$