Diplom – VP Informatik/**Numerik** 23. Februar 2000

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & \alpha(\alpha-2) \\ \alpha\beta & 0 & \alpha^2\beta+1 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha-2) & 0 & \alpha^2(\alpha-2)+\dfrac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α und β is A positiv definit.

b) Berechne die Determinante von A.

c) Für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $b = (6, -3, 7, -7)^T$ berechne man die Lösung von $Ax = b$.

d) Welche Vorteile hat die L-D-L^T-Zerlegung gegenüber der L-R-Zerlegung?

Teil a)

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & \alpha(\alpha-2) \\ \alpha\beta & 0 & \alpha^2\beta+1 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha-2) & 0 & \alpha^2(\alpha-2)+\dfrac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ist genau dann (symmetrisch) positiv definit (spd), wenn alle $D_{ii} > 0$ sind. Also

$$\beta > 0 \text{ und } \alpha > 2 \text{ und } \frac{\beta}{(\alpha-2)^3} > 0.$$

Aus den ersten beiden Bedingungen folgt bereits die letzte, also ist A genau dann spd, wenn $\beta > 0$ und $\alpha > 2$.

Teil b)

$\det(A) = \det(L \cdot D \cdot L^T) = \det(L) \cdot \det(D) \cdot \det(L^T) = 1 \cdot \det(D) \cdot 1$. Falls $\alpha \neq 2$ gilt damit

$$det(A) = \frac{\beta^2}{(\alpha-2)^2}.$$

Teil c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \to y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot y_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \to y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Teil d)
Der Aufwand der L-D-L^T-Zerlegung ist nur halb so hoch wie der der L-R-Zerlegung ($\frac{1}{6}n^3 \leftrightarrow \frac{1}{3}n^3$).

Der Speicherplatzbedarf der L-D-L^T-Zerlegung ist ebenfalls nur halb so hoch wie der der L-R-Zerlegung. (Man benötigt lediglich einen Vektor für die Diagonale von D, L wird im linken, unteren Teil von A gespeichert. Da A symmetrisch ist, geht dadurch keine Information verloren.)