Diplom – VP **Numerik** 13. September 2004

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -40 \\ 80 & -10 & 10 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Skalieren (Zeilenäquilibrierung) Sie A und bestimmen Sie die LR-Zerlegung ohne und mit Pivotisierung der skalierten Matrix. Geben Sie L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A. (Mit Zwischenergebnissen, sonst **0 Punkte**)

c) Das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit $b = (-50, 280, -30)^T$ soll mit der LR-Zerlegung aus a) gelöst werden. Transformieren Sie b so ($\rightarrow \tilde{b}$), dass man direkt mit dem Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = \tilde{b}$) beginnen kann. (D.h.: Nur $\tilde{b}$ angeben, Lösung des Gleichungssystems nicht gefordert!)

Teil a)

$$\left.\begin{array}{lcccccccc} s_1 & = & 10 & + & 0 & + & 40 & = & 50 \\ s_2 & = & 80 & + & 10 & + & 10 & = & 100 \\ s_3 & = & 10 & + & 5 & + & 5 & = & 20 \end{array}\right\} \rightarrow A_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ -0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

LR mit überschreiben in A_s

$$A_s \rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 4 & -0.1 & 3.3 \\ -2.5 & 0.25 & -1.75 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 4 & -0.1 & 3.3 \\ -2.5 & -2.5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

Also:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2.5 & -2.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 0 & -0.1 & 3.3 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}$$

Teil b)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} s_i \cdot R_{ii} \left(= \prod_{i=1}^{3} s_i \cdot \prod_{i=1}^{3} R_{ii} \right) = 100000 \cdot (-0.13) = -13000$$

Teil c)

Skalierung auf b anwenden:

$$b_i \rightarrow \tilde{b}_i = b_i / s_i \quad \text{ergibt} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.8 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Nachtrag: Mit Pivotisierung:
Pivotzeile 2 : Pivovektor $\rightarrow (2,1,3)^T$ $L_{2,1} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$, $L_{3,1} = \frac{-0.5}{0.8} = -0.625$

$$A \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.025 & -0.825 \\ 0 & 0.1875 & 0.3125 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3 : Pivovektor $\rightarrow (2,3,1)^T$ $L_{3,2} = \frac{0.025}{0.1875} = 0.133333$

$$R_1 \rightarrow R_2 = R = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1875 & 0.3125 \\ 0 & 0 & -0.866667 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.625 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.133333 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei zwei Zeilenvertauschungen *behält* die Determinante ihr Vorzeichen.

Erst die Skalierung ($\hat{b}_i = 1/s_i \cdot b_i$) und dann die Vertauschung gemäß dem Pivovektor ($\tilde{b}_i = \hat{b}_{Pivotvektor[i]}$) einarbeiten:

$$b = \begin{pmatrix} -50 \\ 280 \\ -30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2.8 \\ -1.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2.8 \\ -1.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \tilde{b}$$