Diplom – VP **Numerik** 21. März 2005

Aufgabe 2
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 12+\alpha^2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

c) Lösen Sie $Ax = b$ mittels Cholesky-Verfahren ($\mathrm{L\,D\,L}^T$) für $\alpha = 4$. (L-R-Zerlegung / Gauß gibt 0 Punkte!)

d) Für welche Werte von α ist $A^T A$ **nicht** positiv definit? **Begründung!!**

Teil a)

1. Cholesky-Verfahren:
   $d_{11} = 3.$
   $l_{21} = 0, \qquad l_{31} = \frac{6}{3} = 2, \qquad l_{41} = 0.$
   $d_{22} = 1 - 3 \cdot 0^2 = 1.$
   $l_{32} = (3 - 3 \cdot 0 \cdot 2)/1 = 3, \qquad l_{42} = (2 - 3 \cdot 0 \cdot 0)/1 = 2.$
   $d_{33} = 12 + \alpha^2 - 3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 3^2 = \alpha^2 - 9.$
   $l_{43} = (6 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 2)/(\alpha^2 - 9)) = 0.$ $d_{44} = 6 - 3 \cdot 0^2 - 1 \cdot 2^2 - (\alpha^2 - 9) \cdot 0^2 = 2.$

2. L-D-L^T-Zerlegung von A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Einschränkungen für α:
   Aus $\alpha^2 - 9 > 0$ erhält man $|\alpha| > 3$.
   Also muss $\alpha \in \mathbb{R} \backslash [-3, 3]$ sein, damit A positiv-definit ist.

Teil b)

Determinante von A:

$\det A = 3 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 - 9) \cdot 2 = 6 \cdot (\alpha^2 - 9) = 6 \cdot \alpha^2 - 54$

Teil c)

Lösung des Gleichungssystems:

$$Lz = b \rightarrow z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad Dy = z \rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad L^T x = y \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teil d)

$A^T A$ nicht positiv definit:

Wenn $\alpha \in \{-3, 3\}$ ist, dann folgt aus der Betrachtung von D, dass $\det A = 0$ ist und somit dass A singulär ist. Daraus schließt man, dass $A^T A$ auch singulär ist und somit nicht positiv definit.
Oder: $A^T A$ ist genau dann positiv definit, wenn A vollen Rang hat; also hier: A regulär.