NumaMB 26. März 2007

Aufgabe 1

a) Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 9 \\ -3 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 4 & 17-\alpha^2 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 31 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an. (Berechnung über $L\,R$-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

b) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

c) Für welche Werte von α ist $A^T A$ positiv definit?

d) Bestimmen Sie die Determinante von A für $\alpha = 2$.

e) Es sei nun
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 36 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $L\,D\,L^T x = b$. (Berechnung über $L\,R$-Zerlegung gibt 0 Punkte

---

a) Cholesky-Zerlegung (sehr ausführlich):

$$d_{11} = a_{11} = 3, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-3}{3} = -1, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{0}{3} = 0, \qquad l_{41} = \frac{a_{41}}{d_{11}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 5 - (-1)^2 \cdot 3 = 2, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} d_{11} l_{21}}{d_{22}} = \frac{4 - 0 \cdot 3 \cdot (-1)}{2} = 2,$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} d_{11} l_{21}}{d_{22}} = \frac{-9 - 3 \cdot 3 \cdot (-1)}{2} = 0$$

$$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = 17 - \alpha^2 - 0^2 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2 = 9 - \alpha^2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41} d_{11} l_{31} - l_{42} d_{22} l_{32}}{d_{33}} = \frac{0 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2}{9 - \alpha^2} = 0$$

$$d_{44} = a_{44} - l_{41}^2 d_{11} - l_{42}^2 d_{22} - l_{43}^2 d_{33} = 31 - 3^2 \cdot 3 - 0^2 \cdot 2 - 0^2 \cdot (9 - \alpha^2) = 4,$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(3,\ 2,\ 9-\alpha^2,\ 4) \quad \left(= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

b) A ist positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, d. h. wenn $\alpha^2 < 9 \Leftrightarrow |\alpha| < 3$ gilt.

c) $A^T A$ ist positiv definit, wenn $0 < x^T A^T A x = ||Ax||_2^2$ für alle $x \neq 0$ gilt, d. h. wenn $A = LDL^T$ regulär ist, d. h. (weil L stets regulär) wenn D regulär ist, d. h. wenn $\alpha^2 \neq 9$, d. h. wenn $|\alpha| \neq 3$ gilt.

d) $\det A = \det(LDL^T) = \det(D) = 3 \cdot 2 \cdot (9 - \alpha^2) \cdot 4 = 24 \cdot (9 - 2^2) = 120.$

e) L (Vorwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 36 \\ -24 \end{pmatrix} = b = LDL^T x = Lz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} z \quad \Rightarrow \quad z = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 - (-3) \cdot (-2) = 6 \\ 36 - 0 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 = 6 \\ -24 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 6 - (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$D \text{ (Diagonale):} \quad \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y = \right) \quad \operatorname{diag}(2,\ 1,\ 3,\ 2)\, y = Dy = z = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L^T (Rückwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; : \; L^T x = y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -1 - 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) \\ 6 - (-2) \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \\ 2 - (-1) \cdot (-1) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$