

Aufgabe 1

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skaliertem Matrix $B := DA$) explizit an.
- b) Bestimmen Sie die LR -Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P , L und R explizit an.
- c) Bestimmen Sie die Determinante von A mithilfe der durchgeführten LR -Zerlegung.

a) Zeilenäquilibration:

$$D = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad B := DA = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0 & 0.6667 \\ 0.3 & -0.2 & 0.5 \\ 0.4 & -0.6 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) LR -Zerlegung:

$$B \xrightarrow{\text{Pivot}(3,2,1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.4 & -0.6 & 0 & & & \\ 0.3 & -0.2 & 0.5 & & & \\ -0.3333 & 0 & 0.6667 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.4 & -0.6 & 0 & & & \\ 0.75 & & 0.25 & 0.5 & & \\ -0.8333 & & -0.5 & 0.6667 & & \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Pivot}(3,1,2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.4 & -0.6 & 0 & & & \\ -0.8333 & & -0.5 & 0.6667 & & \\ 0.75 & & 0.25 & 0.5 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.4 & -0.6 & 0 & & & \\ -0.8333 & & -0.5 & 0.6667 & & \\ 0.75 & & -0.5 & 0.8333 & & \end{array} \right)$$

$$\text{also: } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.8333 & 1 & 0 \\ 0.75 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0.8333 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ("in welcher Spalte steht jeweils die Eins?", nie als Matrix speichern!).}$$

c) Da $\det(P) = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} = (-1)^2 = 1$ ist, und da stets $\det(L) = 1$ gilt, erhalten wir mit $PDA = LR$

$$\det(A) = \det(D^{-1}P^{-1}LR) = \frac{\det(R)}{\det(P)\det(D)} = \frac{0.4 \cdot (-0.5) \cdot 0.8333}{(-1)^2 \cdot 0.1111 \cdot 0.1 \cdot 0.2} = -75.$$