**Numerik MB F11** 22. März 2011

**Aufgabe 1**
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -22 & 0 & 28 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -3.8 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

a) Jede Komponente von $b$ sei mit einem relativen Messfehler von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ behaftet; die Matrix $A$ sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in $x$ (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

**Hinweis:** $\|A^{-1}\|_\infty \approx 13.702$.

b) Lösen Sie $A\,x = b$ mittels Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenäquilibrierung) und **mit** Spaltenpivotisierung.

---

**Teil a)** Da nur die rechte Seite gestört sein soll, gilt für die Fehlerfortpflanzung (in der $\|\ \|_\infty$–Norm)

$$r_\infty(x) \le \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b)\ .$$

Gemäß Aufgabenstellung und Definition gilt

$$r_\infty(b) := \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\max_i |\Delta b_i|}{\max_j |b_j|} \le \frac{\max_i(\varepsilon |b_i|)}{\max_j |b_j|} = \frac{\varepsilon \max_i |b_i|}{\max_j |b_j|} = \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Die Norm von $A$ berechnet sich zu

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + 9 + |-90|,\ |-22| + 0 + 28,\ 88 + |-11| + 1\} = \max\{100,\ 50,\ 100\} = 100.$$

Damit gilt gemäß Hinweis und Definition für die Kondition

$$\kappa_\infty(A) := \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 100 \cdot 13.702 = 1370.2,$$

insgesamt also

$$r_\infty(x) \le \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b) \le 1370.2 \cdot \quad 2 \cdot 10^{-4} = 0.274035 \approx 27.5\%.$$

**Teil b)** Die Skalierungsfaktoren $s_i := \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}|$ sind bereits in a) für $\|A\|_\infty$ berechnet worden, und zwar zu

$$s_1 = 100, \qquad s_2 = 50, \qquad s_3 = 100.$$

Also lautet die skalierte Matrix sowie die skalierte rechte Seite

$$(A_s \mid b_s) = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.09 & -0.9 & | & -0.105 \\ -0.44 & 0 & 0.56 & | & -0.076 \\ 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ -0.44 & 0 & 0.56 & | & -0.076 \\ 0.01 & 0.09 & -0.9 & | & -0.105 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{l_{2,1}=-0.5 \\ l_{3,1}=0.0113636}}{\longrightarrow} \left(\begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ 0 & 0.09125 & -0.900114 & | & -0.108261 \\ 0 & -0.055 & 0.565 & | & 0.0675 \end{pmatrix}\right) \overset{Z_2 \leftrightarrow Z_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ 0 & 0.09125 & -0.900114 & | & -0.108261 \\ 0 & 0 & 0.0224658 & | & 0.00224658 \end{pmatrix}$$

$$\overset{l_{3,2}=-0.60274}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ 0 & 0.09125 & -0.900114 & | & -0.108261 \\ 0 & 0 & 0.0224658 & | & 0.00224658 \end{pmatrix} .$$

Rückwärtseinsetzen liefert

$$x = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} .$$