NumaMB 19. März 2013

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D und die skalierte Matrix $B := D\,A$ explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (1, 3, -0.5)^T$ unter Verwendung der in a) und b) bestimmten Zerlegung von A.
Achtung! Alle anderen Wege geben **0 Punkte**.

d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.
Achtung! Der Rechenweg muss ersichtlich sein. Andernfalls wird der Aufgabenteil mit **0 Punkten** bewertet.

---

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & -0.5 & -0.25 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

b) LR-Zerlegung:

$$B \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ -0.5 & 0.375 & 0.625 \\ 0.5 & -0.625 & -0.375 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot}(1,3,2)} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & -0.625 & -0.375 \\ -0.5 & 0.375 & 0.625 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & -0.625 & -0.375 \\ -0.5 & -0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & -0.625 & -0.375 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \text{Pivotvektor} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

c) Anwendung von D und dann P auf rechte Seite, d. h. $LRx = PDb$. Lösen durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

$$Db = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.375 \\ -0.125 \end{pmatrix}, \; PDb = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \\ 0.375 \end{pmatrix} = LRx = Ly$$

$$\Rightarrow \; y = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix} = Rx \;\; \Rightarrow \;\; x = \begin{pmatrix} 0.125 \\ -0.125 \\ 0.875 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

d) Da $PDA = LR \Leftrightarrow A = D^{-1}P^{-1}LR$ ist, gilt für die Determinante von A:

$$det(A) = det(D^{-1})\, det(P^{-1})\, det(L)\, det(R)$$

Hinweis: $det(P^{-1}) = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen}$

$$det(A) = \frac{1}{0.25 \cdot 0.125 \cdot 0.25} \cdot (-1)^1 \cdot 1 \cdot (0.5 \cdot (-0.625) \cdot 0.4) = 16 \qquad \textbf{(1)}$$