

**IGPM – K.-H. Brakhage**  
**Einige Lösungen zu Kapitel 8**

**Aufgabe 8.2**

Newton-Cotes Formeln zu Quadratur

- Mittelpunktsregel, Trapezregel, Simpson-Regel, 3/8-Regel, Milne-Regel

---

---

$$f := x \rightarrow e^x$$

**Werte:**

<b>Mittelpunktsregel</b>	$MR := 2.0$
<b>Trapezregel</b>	$TR := 3.086161269$
<b>Simpson-Regel</b>	$SR := 2.362053757$
<b>3/8-Regel</b>	$DA := 2.355648119$
<b>Milne-Regel</b>	$MiR := 2.350470904$
<b>Fehlerabschätzungen: (<math>:= \leftarrow \rightarrow \leq</math>)</b>	

$$\begin{aligned} FMR &:= 0.9060939426 \\ FTR &:= 1.812187885 \\ FSR &:= 0.03020313142 \\ FDA &:= 0.01342361397 \\ FMiR &:= 0.0001797805442 \end{aligned}$$

---

**Neue Funktion:**

$$f := x \rightarrow \ln(x)$$

**Werte:**

<b>Mittelpunktsregel</b>	$MR := 0.4054651081$
<b>Trapezregel</b>	$TR := 0.3465735903$
<b>Simpson-Regel</b>	$SR := 0.3858346022$
<b>3/8-Regel</b>	$DA := 0.3860837835$
<b>Milne-Regel</b>	$MiR := 0.3862878936$
<b>Fehlerabschätzungen: (<math>:= \leftarrow \rightarrow \leq</math>)</b>	

$$\begin{aligned} FMR &:= 0.04166666667 \\ FTR &:= 0.08333333333 \\ FSR &:= 0.002083333333 \\ FDA &:= 0.0009259259256 \\ FMiR &:= 0.00006200396825 \end{aligned}$$

---

**Aufgabe 8.4**

Summierte Newton-Cotes Formeln zu Quadratur

- Mittelpunktsregel, Trapezregel, Simpson-Regel

---

---

**Summierte Formeln**

$$\begin{aligned} SMR &:= h_M \left( \sum_{i=1}^{n_M} f \left( a + \left( i - \frac{1}{2} \right) h_M \right) \right) \\ STR &:= h_T \left( 0.5 f(a) + \left( \sum_{i=1}^{n_T-1} f(a + i h_T) \right) + 0.5 f(b) \right) \\ SSR &:= \frac{1}{6} h_S \left( f(a) + 4 \left( \sum_{i=1}^{n_S} f \left( a + \left( i - \frac{1}{2} \right) h_S \right) \right) + 2 \left( \sum_{i=1}^{n_S-1} f(a + i h_S) \right) + f(b) \right) \end{aligned}$$

Fehlerformeln: ( $:= \leftarrow \rightarrow \Leftarrow$ )

$$FSMR := \frac{1}{24} n h_M^3 fm2 \quad FSMR := \frac{1}{24} h_M^2 (b-a) fm2$$

$$FSTR := \frac{1}{12} n h_T^3 fm2 \quad FSTR := \frac{1}{12} h_T^2 (b-a) fm2$$

$$FSSR := \frac{1}{2880} n h_S^5 fm4 \quad FSSR := \frac{1}{2880} h_S^4 (b-a) fm4$$

Funktion sowie 2. und 4. Ableitung:

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x} \quad f2 := x \rightarrow \frac{2}{x^3} \quad f4 := x \rightarrow \frac{24}{x^5}$$

Die summierte Mittelpunktsregel

$$n_M := 2465 \quad (671+238=909 < 2465 \text{ -- 2.Ableitung am linken Rand groß})$$
$$h_M := 0.0003651115619$$
$$SMR := 2.302584543$$

Die summierte Trapezregel

$$n_T := 3486 \quad (949+336=1285 < 3486 \text{ -- 2.Ableitung am linken Rand groß})$$
$$h_T := 0.0002581755594$$
$$STR := 2.302585642$$

Die summierte Simpsonregel

$$n_S := 84 \quad (26+11=2=37 < 84 \text{ -- 4.Ableitung am linken Rand groß})$$
$$h_S := 0.01071428571$$
$$SSR := 2.302585365$$

---

## Aufgabe 8.10

Summierte Trapezregel und Rombergextrapolation (15-stellige Rechnung)

---

$$f := x \rightarrow \frac{1}{1+x}$$

$$n := 2 \quad h := \frac{1}{2} \quad T_{0,0} := 0.708333333333333$$

$$n := 4 \quad h := \frac{1}{4} \quad T_{1,0} := 0.697023809523810$$

$$n := 8 \quad h := \frac{1}{8} \quad T_{2,0} := 0.694121850371850$$

$$n := 16 \quad h := \frac{1}{16} \quad T_{3,0} := 0.693391202207525$$

$$n := 32 \quad h := \frac{1}{32} \quad T_{4,0} := 0.693208208269250$$

Rombergextrapolation

0.708333333333333				
0.697023809524	0.693253968254			
0.694121850372	0.693154530655	0.693147901481		
0.693391202208	0.693147652819	0.693147194297	0.693147183072	
0.693208208269	0.693147210290	0.693147180788	0.693147180573	0.693147180564

Fehlerschätzer:

$$|T_{N,N} - T_{N,N-1}| = |-0.979810^{-11}|$$

Hausübung (letzte Zeile Rombergextrapolation)

2.304213334235 2.302597560528 2.302586497531 2.302585726966 2.302585595591 2.302585565919