Aufgabe: Bestimme $\quad x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|A\,x - b\|_2 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -12 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

Householder:

Starte mit $(A|b)$, dann:

Für alle Spalten von A (Index j)

$$y = \textit{erste Spalte} \text{ von } A \quad \left(y = \begin{pmatrix} a_{jj} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \right)$$

$$\alpha_j = \operatorname{sign}(y_1)\,\|y\|_2$$

$$v_j = y + \alpha\, e_1$$

$$[A|b] \leftarrow [A|b] - (\tfrac{1}{v_j^T\,y}\,v_j)\,(v_j^T\,(A|b)) \quad \left(\beta_j = \tfrac{2}{v_j^T\,v_j} = \tfrac{1}{v_j^T\,y}\right)$$

streiche (behandle nicht mehr) die erste Zeile und Spalte von $[A|b] \to$ (Zwischen-)Ergebnis

end j

Damit $(A|b) \to (R|Q^T\,b) = \begin{pmatrix} \tilde{R} & | & b_1 \\ 0 & | & b_2 \end{pmatrix}$.

$\tilde{R}\,x^* = b_1$ liefert durch Rückwärtseinsetzen die Lösung x^*.

$\|b_2\|_2 = \|A\,x^* - b\|_2$ ist das Residuum.

			3	7	10	
			0	−12	−11	
			4	1	5	$\alpha_1 = +\sqrt{3^2+0+4^2} = 5$
8	0	4	(40)	60	100	$\beta_1 = 1/40 = 0.025$
		0.2	−5	−5	−10	
		0	0	−12	−11	
		0.1	0	−5	−5	$\alpha_2 = -\sqrt{12^2+5^2} = -13$
	−25	−5		(325)	300	$\beta_2 = 1/325 = 0.0030769$
			−5	−5	−10	1.071
		−0.076923	0	13	12.077	0.92899
		−0.015385	0	0	−0.38462	$res = 0.38462$

Also: $x^* = \begin{pmatrix} 1.071 \\ 0.92899 \end{pmatrix}$ und $\|A\,x^* - b\|_2 = 0.38462$

Givens:

Starte mit $(A|b)$, dann:

Für alle Spalten von A (Index j)

Für alle Zeilen von $(A|b)$ unterhalb der Diagoinalen (Index $i > j$)

eliminiere a_{ij}: $a = a_{jj}$, $b = a_{ij}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $c = \frac{a}{r}$ und $s = \frac{b}{r}$

bearbeite die i-te und j-te Zeile von $(A|b)$ (als ob man mit G_{ij} multipliziert)

$$\begin{array}{lclcl} (a_{i\,.}|b_i) & \leftarrow & c\cdot(a_{i\,.}|b_i) & + & s\cdot(a_{j\,.}|b_j) \\ (a_{j\,.}|b_j) & \leftarrow & -s\cdot(a_{i\,.}|b_i) & + & c\cdot(a_{j\,.}|b_j) \end{array}$$

end i

end j

Wieder (Wie bei Householder) $(A|b) \to (R|Q^T\,b)$. Rest wie Householder.

$$\text{Starte mit:} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 0 & -12 & | & -11 \\ 4 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

a_{21} ist schon Null!

$$\left.\begin{array}{r} \text{eliminiere } a_{31}: \\ a = a_{1,1} = 3 \\ b = a_{3,1} = 4 \end{array}\right\} : \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} r = 5 \\ c = 0.6 \\ s = 0.8 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 5 & 5 & | & 10 \\ 0 & -12 & | & -11 \\ 0 & -5 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{eliminiere } a_{32}: \\ a = a_{2,2} = -12 \\ b = a_{3,2} = -5 \end{array}\right\} : \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} r = 13 \\ c = -0.92308 \\ s = -0.38462 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 5 & 5 & | & 10 \\ 0 & 13 & | & 12.077 \\ 0 & 0 & | & 0.38462 \end{pmatrix}$$

Also: $x^* = \begin{pmatrix} (10 - 5 \cdot 0.92899)/5 \\ 12.077/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.071 \\ 0.92899 \end{pmatrix}$ und $\|A\,x^* - b\|_2 = 0.38462$

Normalgleichungen:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 0 & -12 & | & -11 \\ 4 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \to A^T\,(A|b) = \begin{pmatrix} 25 & 25 & | & 50 \\ 25 & 194 & | & 207 \end{pmatrix}\ .$$

Löse $A^T\,A\,x = A^T b$ mit Cholesky $\to x = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 181 \\ 157 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.071 \\ 0.92899 \end{pmatrix}$.

Residum ist hier schwieriger.

$r_V := A\,x^* - b = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} -48 \\ -25 \\ 36 \end{pmatrix}$; und dann $r = \|r_v\|_2 = \frac{5}{13} = 0.38462$.