Algorithmus: Skalierung einer $n \times n$ Matrix A mit Überschreiben von A und Speichern der Skalierungsinformation in dem Vektor d.

- Für (alle Zeilen) $i = 1, 2, \ldots, n$ berechne
  - $s_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ und damit $d_i = \dfrac{1}{s_i}$
  - Für $j = 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, n$
    - Ersetze a_{ij} durch $d_i\, a_{ij}$

Danach enthält A die jetzt skalierte Matrix A. Der Vektor d enthält die notwendige Information für die Skalierung der rechten Seite.

Algorithmus: Bestimmung der LR-Zerlegung mit Pivotisierung einer $n \times n$ Matrix A mit Überschreiben von A und Speichern der Vertauschungsinformation in dem Vektor p.

- Initialisiere Pivotisierung: Setze $p = (1, 2, ..., n)$
- Für (alle Spalten) $j = 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, n$
  - Pivotisierung:
    Bestimme den/einen Index $i_p \in \{j+1,\, j+2,\, \ldots,\, n\}$ mit $|a_{i_p j}| = \max\limits_{i \in \{j+1,\, j+2, \ldots n\}} |a_{ij}|$.
    Falls $|a_{i_p j}| > |a_{jj}|$: Vertausche die i_p-te und die j-te Zeile von A und die i_p-te und die j-te Komponente von p. Falls $|a_{jj}| < \varepsilon$, ist die Matrix A nicht zerlegbar $\rightarrow$ **Fehlermeldung**.
  - Eliminationsschritt:
    Für (die Zeilen) $i = j+1, j+2, \ldots, n$:
    - Ersetze a_{ij} durch $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ (L Element).
    - Für $k = j+1, j+2, \ldots, n$ ersetze a_{ik} durch $a_{ik} - a_{ij}\, a_{jk}$ (R Elemente).

Danach enthält die obere Hälfte von A (einschließlich der Diagonale) die obere Hälfte von R. Die untere Hälfte von A (ohne Diagonale) enthält die untere Hälfte von L ohne die Diagonale, die durch *Einsen* ergänzt werden muss. Der Vektor p enthält die notwendige Information für Vertauschung der rechten Seite.

Bem.: Für die Determinante det der Ausgangsmatrix gilt jetzt:

$$\det = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen} \prod_{i=1}^{n} s_i \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \; = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \; .$$

Algorithmus: Löse $A\,x = b$ bei bekannter obiger Skalierung und LR-Zerlegung.

- (Skalierung:) Für $i = 1, \ldots, n$ ersetze b_i durch $d_i\, b_i$.
- (Pivotisierung:) Für $i = 1, \ldots, n$ setze $z_i = b_{p_i}$.
- Löse $L\,y = z$ durch Vorwärtseinsetzen
  $y_1 = z_1$
  Für $i = 2,\, \ldots,\, n \;:\; y_i = z_i - (a_{i1}\, y_1 + \,\ldots\, + a_{i,i-1}\, y_{i-1})$.
- Löse $R\,x = y$ durch Rückwärtseinsetzen
  $x_n = \dfrac{y_n}{a_{nn}}$
  Für $i = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1 \;:\; x_i = \dfrac{y_i - (a_{i,i+1}\, x_{i+1} + \,\ldots\, + a_{in}\, x_n)}{a_{ii}}$

Beispiel:
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $P\,A = L\,R$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Gib L und R explizit an.

b) Berechne mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung die Determinante von A.

c) Löse das Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

d) Wie a) bis c) aber dieses Mal mit Skalierung

Lösung:
a) Wir speichern die Permutation in einem Vektor, den wir an A anhängen. Um dies deutlich von einer *rechten Seite* zu unterscheiden, verwenden wir als Trennsymbol $||$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & || \; 1 \\ 0 & 1 & 2 & || \; 2 \\ 2 & 1 & 3 & || \; 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & || \; 3 \\ 0 & 1 & 2 & || \; 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & || \; 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & || \; 3 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & || \; 1 \\ 0 & 2/3 & 5/3 & || \; 2 \end{array}\right)$$

Und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Determinante: $\det = (-1)^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}\right) = 5$

c) Wir benutzen p für die Permutation von b und erhalten:
(i) Vorwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1/2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 2/3 & 1 & 6 \end{array}\right) \downarrow \to y = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

(ii) Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 5/3 & 10/3 \end{array}\right) \uparrow \to x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Mit Skalierung:

$$s = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \to d = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} \to A_s = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/5 & 2/5 & 2/5 & || \; 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & || \; 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & || \; 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/6 & 1/2 & || \; 3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & || \; 2 \\ 3/5 & 3/10 & 1/10 & || \; 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/6 & 1/2 & || \; 3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & || \; 2 \\ 3/5 & 9/10 & -1/2 & || \; 1 \end{array}\right)$$

Und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 9/10 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinante: $\det = (-1)^1 \cdot \; (5 \cdot 3 \cdot 6) \; \cdot \; \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2}\right) = 5$

$$b \to b_s = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 2 \\ 5/3 \end{pmatrix} \to z = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2 \\ 9/5 \end{pmatrix} \to \downarrow y = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to \uparrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$