

Wir wollen die **Householder-Transformation in einem Tableau** zusammenfassen. Bei der Anwendung wird ja wie folgt *umgeklammert*:

$$\begin{aligned}
 & \left(I - \frac{2}{v^T v} v v^T \right) [A|b] \\
 &= [A|b] - \left(\frac{2}{v^T v} v \right) (v^T [A|b]) \\
 &=: [A|b] - (\beta v) (v^T [A|b]) \\
 &=: [A|b] - r h
 \end{aligned}$$

Dabei ist h ein Zeilen- und r ein Spaltenvektor.

Im Tableau:

	[A b]		[A b]
	$\alpha = \dots$		
v^T	$h = v^T (A b)$	$\beta = \dots$	$h = v^T (A b)$
$r = \beta v$	$H = r h$		$[A b] - r h$
	$[A b] - H$		

oder kürzer

Beispiel:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -20 & -18 & -44 \\ 0 & 40 & 45 \\ -15 & 24 & -108 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -45 \\ 78 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [A|b]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -20 & -18 & -44 & 4 \\ 0 & 40 & 45 & -45 \\ -15 & 24 & -108 & 78 \end{array} \right]$$

Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Householdertransformationen.

Lösung:

Erste Spalte:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -25 & \left(= -\sqrt{(-20)^2 + 0^2 + (-15)^2} \right) & \text{rechts daneben berechnen} \\
 \rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} & & \text{transponiert als Zeilenvektor eintragen} \\
 \rightarrow \beta_1 &= \frac{2}{2250} & \left(= \frac{2}{v_1^T v_1} \right) & \text{rechts daneben berechnen} \\
 \rightarrow \beta_1 v_1 &= \begin{pmatrix} -1/25 \\ 0 \\ -1/75 \end{pmatrix} & & \text{als Spaltenvektor eintragen}
 \end{aligned}$$

Bem: Mit α_1 kennen wir auch bereits die erste Spalte von $(A|b)^{(1)}$!

Zweite Spalte (nach Berechnung von $(A|b)^{(1)}$):

$$\alpha_2 = 50 \left(= \sqrt{40^2 + 30^2} \right) \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 40 + 50 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \beta_2 = \frac{2}{9000} \left(= \frac{2}{v_2^T v_2} \right) \rightarrow \beta_2 v_2 = \begin{pmatrix} 1/50 \\ 1/150 \end{pmatrix}$$

Bem: Mit α_2 kennen wir auch bereits die erste Spalte von $(A|b)^{(2)}$!

$[A b]^{(0)} =$	$\left[\begin{array}{ccc c} -20 & -18 & -44 & 4 \\ 0 & 40 & 45 & -45 \\ -15 & 24 & -108 & 78 \end{array} \right]$	$\alpha_1 = -25$
$(-45 \ 0 \ -15 \)$	$\left[\begin{array}{ccc c} 1125 & 450 & 3600 & -1350 \end{array} \right]$	$\beta_1 = 2/2250$
$\begin{pmatrix} -1/25 \\ 0 \\ -1/75 \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc c} -45 & -18 & -144 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -6 & -48 & 18 \end{array} \right]$	man beachte die Nullen!
$[A b]^{(1)} =$	$\left[\begin{array}{ccc c} \mathbf{25} & \mathbf{0} & \mathbf{100} & \mathbf{-50} \\ 0 & 40 & 45 & -45 \\ 0 & 30 & -60 & 60 \end{array} \right]$	$\alpha_2 = 50$
$(\ 90 \ 30 \)$	$\left[\begin{array}{ccc c} 4500 & 2250 & -2250 \end{array} \right]$	$\beta_2 = 2/9000$
$\begin{pmatrix} 1/50 \\ 1/150 \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc c} 90 & 45 & -45 \\ 30 & 15 & -15 \end{array} \right]$	
$[A b]^{(2)} =$	$\left[\begin{array}{ccc c} -50 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -75 & 75 \end{array} \right]$	

Bem.: Bei Gleichungssystemen können wir auch die letzte Zeile direkt übernehmen. Bei (echten) Ausgleichs-problemen muss in der letzten Matrixspalte noch eliminiert werden.

Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 0 & 100 & -50 \\ 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -75 & 75 \end{array} \right) \uparrow \rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Und jetzt die Kurzform:

$[A b]^{(0)} =$	$\left[\begin{array}{ccc c} -20 & -18 & -44 & 4 \\ 0 & 40 & 45 & -45 \\ -15 & 24 & -108 & 78 \end{array} \right]$	$\alpha_1 = -25$
$(-45 \ 0 \ -15 \)$	$\left[\begin{array}{ccc c} 450 & 3600 & -1350 \end{array} \right]$	$\beta_1 = 2/2250$
$\begin{pmatrix} -1/25 \\ 0 \\ -1/75 \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc c} \mathbf{25} & \mathbf{0} & \mathbf{100} & \mathbf{-50} \\ 0 & 40 & 45 & -45 \\ 0 & 30 & -60 & 60 \end{array} \right]$	$\alpha_2 = 50$
$(\ 90 \ 30 \)$	$\left[\begin{array}{ccc c} 2250 & -2250 \end{array} \right]$	$\beta_2 = 2/9000$
$\begin{pmatrix} 1/50 \\ 1/150 \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc c} 25 & 0 & 100 & -50 \\ -50 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -75 & 75 & 75 \end{array} \right] \uparrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right)$	

Nach der letzten Elimination wird die Matrix $[R|b]$ mit den Ergebnissen der vorherigen Eliminationen *auf-gefüllt* und das Rückwärtseinsetzen durchgeführt.

Bemerkungen:

- Es ist sehr sinnvoll, v (zumindest annähernd) zu normieren. Praktisch empfiehlt es sich, die Transformation mit $(\tilde{v} := \sqrt{\beta} v)$

$$I - \beta v v^T = I - \tilde{v} \tilde{v}^T$$

zu rechnen.

- β wird in der Praxis folgendermaßen berechnet (es ist ja $|\alpha| = \|y\|_2$):

$$\beta = \frac{1}{|\alpha| (|\alpha| + |y_1|)}$$