Numerische Mathematik I für Ingenieure, SS 2007
Multiple-Choice-Aufgaben

MC 3-1
Es sei $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|.\|$ die zugehörige Matrix–Norm. Weiter seien $A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\|A^k\| \leq \|A\|^k$
- ◯ Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\quad \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$
- ◯ Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{\|x\|=1} \|A\,x\|}$
- ◯ $\forall x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|A\,x\| = \|A\|\,\|x\|$
- ◯ $\|A\,B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
- ◯ $\forall x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|A\,x\| \leq \|A\|\,\|x\|$

MC 3-2
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $a,\, b,\, \Delta b,\; x,\, \Delta x \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$ sei x die Lösung von $A\,x = b$ und $x + \Delta x$ die Lösung von $A\,(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Es sei $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \,\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$
- ◯ $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- ◯ $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A\|^{-1} \,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- ◯ $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$

MC 3-3
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Die rechte Seite b sei mit einem relativen Fehler von ϵ (Maschinengenauigkeit) behaftet. Die Matrix A habe (in der betrachteten Matrixnorm) die Konditionszahl $\kappa(A)$. Wegen der Kondition des Problems $(A, b) \mapsto x = A^{-1}\,b$ muss man bei der Berechnung von x mit einem relativen Fehler in der folgenden Größenordnung rechnen:

- ◯ 2ϵ
- ◯ $\kappa(A)\,\epsilon$
- ◯ $\kappa(A)$
- ◯ $\kappa(A) + \epsilon$

MC 3-4
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ genügen $b,\, x,\, \tilde{x},\, \tilde{r} \in \mathbb{R}^n$ den Gleichungen $A\,x = b$ und $\tilde{r} = b - A\,\tilde{x}$. Auf $\mathbb{R}^n$ sei die Vektornorm $\|.\|$ und die zugehörige Matrixnorm $\|.\|$ und Konditionszahl $\kappa(A)$ gegeben. Welche der folgenden Ungleichungen gelten für alle $\tilde{x}$ und $b \neq 0$?

- ◯ $\kappa(A)^{-1}\,\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\,\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$
- ◯ $\kappa(A)\,\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)^{-1}\,\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$
- ◯ $\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$
- ◯ $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\tilde{r}\|$

MC 3-5
Die Zeilenskalierung (auch Zeilenäquilibrierung genannt) dient dazu

- ◯ die Stabilität der Gauß–Elimination zu verbessern

- ◯ die Effizienz der Gauß–Elimination zu verbessern
- ◯ die Konditionszahl der vorliegenden Matrix zu verkleinern
- ◯ Auslöschung zu vermeiden.

MC 3-6
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x,\, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Welche der folgenden Angaben zur Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") (nur Multiplikationen und Divisionen) ist korrekt?

- ◯ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $n^2 + \mathcal{O}(n)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n}{2} + \mathcal{O}(1)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops

MC 3-7
Es sei $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Welche der folgenden Ausdrücke definiert eine Householder–Transformation?

- ◯ $I - 2\,\frac{v\,v^T}{v^T\,v}$
- ◯ $I - 2\,\frac{v^T\,v}{v^T\,v}$
- ◯ $I - \frac{v\,v^T}{v^T\,v}$
- ◯ $I - 2\,\|v\|_2^{-2}\;v\,v^T$

MC 3-8
Welche der folgenden Aussagen für Zerlegungen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind korrekt?

- ◯ Ist A invertierbar, so besitzt es eine LR–Zerlegung: $A = L\,R$
- ◯ A besitzt nur dann eine QR–Zerlegung, falls A regulär ist.
- ◯ Die Berechnung der QR–Zerlegung von A mittels Householder–Transformationen ist etwa doppelt so aufwändig wie die Berechnung der L–R–Zerlegung (über Gauß–Elimination) mit Spaltenpivotisierung.
- ◯ Zur Berechnung der QR–Zerlegung einer dünnbesetzten Matrix ist das Verfahren mittels Givens–Rotationen i.A. effizienter als das Verfahren mittels Householder–Spiegelungen.

MC 3-9
Es seien $A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale (quadratische) Matrizen, d.h. $A^T A = I$ und $B^T B = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Weiter bezeichne $\|.\|_2$ die Euklidische Vektornorm, $\|.\|_2$ die zugehörige Matrixnorm und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Welche der folgenden Aussagen sind immer korrekt?

- ◯ A^T ist orthogonal
- ◯ $A\,A^T = I$

- ◯ A ist nicht symmetrisch
- ◯ A ist symmetrisch
- ◯ $A\,B$ ist eine orthogonale Matrix
- ◯ Die Spalten von A sind paarweise orthogonal
- ◯ Die Zeilen von A sind paarweise orthogonal
- ◯ Alle Zeilen und Spalten von A haben die Euklidische Länge 1
- ◯ $\|A\,x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ $\kappa_2(A) = 1$

MC 3-10
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Abkürzung “SPD” stehe für symmetrisch und positiv–definit. Welche der folgenden Aussagen ist **nicht** korrekt?

- ◯ A SPD $\Longrightarrow A$ ist invertierbar
- ◯ A SPD $\Longrightarrow A^{-1}$ ist ebenfalls SPD
- ◯ A SPD $\Longrightarrow A$ hat nur positive Eigenwerte
- ◯ A SPD $\Longrightarrow$ es existiert eine Matrix “$\sqrt{A}$” mit $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$
- ◯ A symmetrisch mit $A > 0$ (komponentenweise) $\Longrightarrow A$ ist SPD
- ◯ Zur Lösung eines Gleichungssystems mit einer SPD–Matrix kann man bei der Gauß–Elimination auf die Spaltenpivotisierung verzichten.
- ◯ A ist eine SPD–Matrix genau dann, wenn A eine Cholesky–Zerlegung besitzt, und alle Diagonalelemente des Cholesky–Faktors L ($A = L\,L^T$) positiv sind.

MC 3-11
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Falls eine Zerlegung $A = LDL^T$ existiert, dann ist A symmetrisch positiv definit.
- ◯ Für jede invertierbare Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.
- ◯ Für jede symmetrische Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.
- ◯ Die Matrix LDL^T ist invertierbar.

MC 3-12
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.
- ◯ Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.
- ◯ Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.
- ◯ Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.

MC 3-13
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|Q\|_2 = 1$.

- ◯ Q^T ist orthogonal.
- ◯ $\|Q^{-1}\|_2 = 1$.
- ◯ Q ist symmetrisch positiv definit.

MC 3-14
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A mit $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\det A = \det R$.
- ◯ Eine QR-Zerlegung existiert für jedes $A \in R^{m\times n}$.
- ◯ $\|A\|_2 = \|R\|_2$.
- ◯ Zur Bestimmung einer QR-Zerlegung wird oft das Householder-Verfahren mit Pivotisierung benutzt.

MC 3-15
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $G_1, \dots, G_k$ Givens-Rotationen, so dass $G_k \dots G_2 G_1 A = R$, mit einer oberen Dreiecksmatrix R. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Produktmatrix $G_k \dots G_1$ ist orthogonal.
- ◯ Es gilt: $A = G_1^T \dots G_k^T R$.
- ◯ Es gilt: $A = G_k^T \dots G_1^T R$.
- ◯ $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.

MC 3-16
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $Q_v = I - 2\,\dfrac{v\,v^T}{v^T v}$ die entsprechende Householder-Transformation. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|Q_v x\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- ◯ Q_v ist symmetrisch.
- ◯ $Q_v v = -v$.
- ◯ Q_v ist symmetrisch positiv definit.

MC 3-17
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit zugehöriger normierter unterer Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und regulärer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Cholesky-Algorithmus liefert nur dann eine Zerlegung $A = LDL^T$, wenn A symmetrisch und positiv definit ist.
- ◯ Der Cholesky-Algorithmus liefert stets eine Zerlegung $A = LDL^T$, wenn A symmetrisch und regulär ist.
- ◯ Bei bereits bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ löst man das System $Ax = b$ am effizientesten, indem man zuerst das Produkt LD berechnet, dann aus $b = LDz$ durch Vorwärtseinsetzen z bestimmt und schließlich aus $z = L^T x$ durch Rückwärtseinsetzen x bestimmt.
- ◯ Bei bereits bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ löst man das System $Ax = b$ am effizientesten, indem man aus $b = Ly$ durch Vorwärtseinsetzen y bestimmt, dann $D^{-1}y$ berechnet und schließlich aus $D^{-1}y = L^T x$ durch Rückwärtseinsetzen x bestimmt.

MC 3-18
Mit $m \geq n$ sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit zugehöriger rechter oberer Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Orthogonalmatrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so dass $A = QR$ gilt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Unabhängig davon, ob A vollen Rang n hat oder nicht, lässt sich mit dem Givens- oder Householder-Algorithmus stets eine Zerlegung $A = QR$ finden.

- ◯ Auch mit dem Gauß-Algorithmus lässt sich stets eine Zerlegung $A = QR$ finden.
- ◯ Zur Bestimmung von R ist das aufwändige explizite Aufstellen von Q nicht notwendig.
- ◯ Q^T erhält man am einfachsten, indem man mit der Identitätsmatrix I startend jeweils exakt dieselben Transformationen ausführt wie mit A.
- ◯ Die sich ergebende Matrix Q (und ebenso R) ist beim Givens-Algorithmus stets dieselbe wie beim Householder-Algorithmus.
- ◯ Für die mit dem Householder-Algorithmus bestimmte Zerlegung gilt stets $Q = Q^T$, während dies beim Givens-Algorithmus nicht der Fall ist.

MC 3-19
Es sei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und κ_2 bezeichne die Kondition bzgl. der $\|.\|_2$-Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $Q^T Q = QQ^T = I$.
- ◯ $|\det(Q)| = \|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \kappa_2(Q) = \kappa_2(Q^T) = \kappa_2(Q^{-1}) = 1$.
- ◯ $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$.
- ◯ $\|QA\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.
- ◯ $\kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ) = \kappa_2(A) \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

MC 3-20
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen bezüglich orthogonaler Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ an.

- ◯ Orthogonale Matrizen sind stets symmetrisch.
- ◯ Die $\|.\|_2$-Norm jeder Zeile und Spalte einer orthogonalen Matrix ist stets gleich 1.
- ◯ Orthogonale Matrizen sind stets identisch mit ihrer Inversen.
- ◯ Produkte orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.