Numerische Mathematik I für Ingenieure, SS 2007
Multiple-Choice-Aufgaben

MC 4-1
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind **nicht** korrekt?

- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit, falls A den Rang n hat.
- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch.
- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.
- ◯ $A^T A$ ist invertierbar.

MC 4-2
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := \frac{1}{2}\,\|A\,x - b\|_2^2$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\nabla\varphi(x) = A^T\,(A\,x - b)$
- ◯ $\nabla\varphi(x) = A\,x - b$
- ◯ $\nabla\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow A^T\,A\,x = A^T\,b$
- ◯ $\nabla\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow A\,x = b$

MC 4-3
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $Rang(A) = n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ Für $x^\star \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|A\,x^\star - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \Longleftrightarrow A^T\,A\,x^\star = A^T\,b$
- ◯ Für $x^\star \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|A\,x^\star - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \Longleftrightarrow A\,x^\star = b$
- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch
- ◯ $A^T A$ ist orthogonal
- ◯ $A^T A$ ist invertierbar
- ◯ A ist invertierbar

MC 4-4
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $Rang(A) = n$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - b\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ Die Matrix R kann man mittels Householder–Transformationen bestimmen.
- ◯ Die Matrix R kann man mittels Givens–Transformationen bestimmen.
- ◯ Die Matrix R kann man dem Cholesky–Verfahren bestimmen.

MC 4-5
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $Rang(A) = n$. Die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Vorgehensweisen liefern denselben Vektor $x^\star$?

- ◯ $z^\star$ sei die Minimalstelle von $\min_{z\in\mathbb{R}^n} \|\hat{A}\,z - b\|_2$ und $x^\star = T\,z^\star$ mit $\hat{A} = A\,T$, wobei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige, aber reguläre Matrix ist.
- ◯ $x^\star$ ist die Minimalstelle von $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|\hat{A}\,x - \hat{b}\|_2$ mit $\hat{A} = T\,A$ und $\hat{b} = T\,b$, wobei $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine beliebige, aber reguläre Matrix ist.

- ◯ $z^\star$ sei die Minimalstelle von $\min_{z\in\mathbb{R}^n} \|A\, f(z) - b\|_2$ und $x^\star = f(z^\star)$, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige, invertierbare Funktion ist.

MC 4-6
Zu gegebenen Ansatzfunktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad 1 \le k \le n$, sollen die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass das Modell $m(x, c) := \sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k(x)$ die Daten $(x_i, y_i),\ 1 \le i \le m$, möglichst gut wiedergibt, d.h. die Fehlerquadratsumme minimiert. Im Folgenden sei $x := (x_1, \ldots, x_m)^T$ und $y := (y_1, \ldots, y_m)^T$. Welche der folgenden Vorgehensweisen sind geeignet, den Koeffizientenvektor $c := (c_1, \ldots, c_n)^T$ zu bestimmen?

- ◯ c minimiert $\min_{c\in\mathbb{R}^n} \|A\, c - y\|_2$ wobei $A_{i,k} = \varphi_k(x_i)$ ist.
- ◯ c minimiert $\min_{c\in\mathbb{R}^n} \|A\, c - y\|_2$ wobei $A_{i,k} = \varphi_i(x_k)$ ist.
- ◯ c minimiert $\min_{c\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^n \big(c_k \cdot \varphi_k(x_i)\big) - y_i\right]^2$
- ◯ $c^T\, \Phi = y$ mit $\Phi_{i,k} := \varphi_k(x_i)$

MC 4-7
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebige Matrizen vom Rang n. Zu $c, d \in \mathbb{R}^m$ löse $x \in \mathbb{R}^n$ das Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\, x - c\|_2$ und y das Ausgleichsproblem $\min_{y\in\mathbb{R}^n} \|B\, y - d\|_2$; weiter sei $z \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des Ausgleichsproblems $\min_{z\in\mathbb{R}^n} \|A\, z - d\|_2$. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

- ◯ $x + y$ löst das Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \min_{y\in\mathbb{R}^n} \|A\, x + B\, y - (c + d)\|_2$
- ◯ $u = x + y$ löst das Ausgleichsproblem $\min_{u\in\mathbb{R}^n} \|(A + B)\, u - (c + d)\|_2$
- ◯ $u = x + z$ löst das Ausgleichsproblem $\min_{u\in\mathbb{R}^n} \|A\, u - (c + d)\|_2$
- ◯ $u = s\, x$ löst das Ausgleichsproblem $\min_{u\in\mathbb{R}^n} \|s\, A\, u - s\, c\|_2 \quad$ für alle $s \neq 0$
- ◯ $u = s\, x$ löst das Ausgleichsproblem $\min_{u\in\mathbb{R}^n} \|A\, u - s\, c\|_2 \quad$ für alle $s \neq 0$

MC 4-8
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $A^T A$ und AA^T sind beide symmetrisch.
- ◯ Wenn alle Spalten von A unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.
- ◯ Wenn alle Spalten von A unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.
- ◯ $A^T A$ ist invertierbar.

MC 4-9
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ eine Matrix mit unabhängigen Spalten und

$$QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|QA\|_2 = \|R\|_2$.
- ◯ R ist invertierbar.
- ◯ $\tilde{R}$ ist invertierbar.
- ◯ $A^{-1} = \tilde{R}^{-1} Q$.

MC 4-10
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ eine Matrix mit unabhängigen Spalten und $b \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten das lineare Ausgleichsproblem $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ mit Lösung x^*. Sei $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und sei $\tilde{x}$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - \tilde{b}\|_2$. Weiter sei $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ so, dass $\sin(\theta) = \frac{\|b - Ax^*\|_2}{\|b\|_2}$.
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ $\dfrac{\|\tilde{x}-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \dfrac{\kappa_2(A)}{\cos(\theta)} \cdot \dfrac{\|\tilde{b}-b\|_2}{\|b\|_2}$.

○ $\dfrac{\|\tilde{x}-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \dfrac{\kappa_2(A)}{\sin(\theta)} \cdot \dfrac{\|\tilde{b}-b\|_2}{\|b\|_2}$.

○ $\dfrac{\|\tilde{x}-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \kappa_2(A) \cdot \dfrac{\|\tilde{b}-b\|_2}{\|b\|_2}$.

○ $\|\tilde{x}-x^*\|_2 \leq \|(A^TA)^{-1}\|_2 \cdot \|\tilde{b}-b\|_2$

MC 4-11

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ eine Matrix mit unabhängigen Spalten und

$$QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Sei x^* die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ $Rx^* = b$.

○ $\|Ax-b\|_2 = \|Rx-Qb\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

○ $Rx^* = Qb$.

○ $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$.

MC 4-12

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ eine Matrix mit unabhängigen Spalten und $b \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten das lineare Ausgleichsproblem $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2$ mit Lösung x^*. Sei $A^TA = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung von A^TA. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung wird in der Regel das Cholesky-Verfahren mit Pivotisierung verwendet.

○ Es gilt $L^Tx^* = D^{-1}y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist.

○ Es gilt $L^Tx^* = D^{-1}y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = A^Tb$ ist.

○ Es gilt $\|Ax-b\|_2 = \|LDL^Tx - A^Tb\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

MC 4-13

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ eine Matrix mit unabhängigen Spalten und $b \in \mathbb{R}^m$. Zur Lösung des Ausgleichsproblems $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2$ vergleichen wir die Methode der Normalgleichungen mit der Methode der QR-Zerlegung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Der Rechenaufwand bei der Methode der Normalgleichungen ist in der Regel geringer als bei der Methode der QR-Zerlegung.

○ Die Methode der Normalgleichungen ist in der Regel stabiler als die Methode der QR-Zerlegung.

○ Der Nachteil der Methode der Normalgleichungen ist, dass man für die Stabilität Pivotisierung benötigt.

○ Bei der Methode der Normalgleichungen muss die Matrix A^TA berechnet werden, während bei der Methode der QR-Zerlegung die Matrix Q nicht explizit bestimmt wird.

MC 4-14

Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax-b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Die Normalgleichungen tragen ihren Namen, weil der damit berechnete Residuenvektor $Ax-b$ orthogonal zu den Spaltenvektoren von A ist.

◯ Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung großer Gleichungssysteme ungeeignet.

◯ Selbst wenn A den vollen Rang n hat, lassen sich die Normalgleichungen nicht immer mit dem Cholesky-Verfahren lösen.

◯ Für $m \gg n$ sind die Normalgleichungen etwa einen Faktor 4 bzw. 2 weniger aufwändig als eine QR-Transformation mit dem Givens- bzw. Householder-Algorithmus.

◯ Im Gegensatz zu Givens-Rotationen lässt sich mit Householder-Spiegelungen das Residuum $\|Ax - b\|_2$ nicht direkt aus dem transformierten System $Rx - Q^T b$ ablesen, sondern man muss erst $Ax - b$ explizit ausrechnen.