Numerische Mathematik I für Ingenieure, SS 2007
Multiple-Choice-Aufgaben

MC 5-1
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\det(M) \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x - M\,f(x)$
- ◯ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x + M\,f(x)$
- ◯ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := M\,f(x)$
- ◯ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x - f(x)\,M$
- ◯ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x - f(M\,x)$

MC 5-2
Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ Falls $|\Phi'(x^\star)| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^\star|$ hinreichend klein.
- ◯ Falls $|\Phi'(x^\star)| > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^\star$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$.
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.
- ◯ Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^\star|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.

MC 5-3
Es sei $f(x) = x^5 + e^x - 2$. Dann hat das Newton–Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f die Form:

- ◯ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{x_k^5 + e^{x_k} - 2}{5x_k^4 + e^{x_k}}$ für $k = 0, 1, \ldots$
- ◯ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{5x_k^4 + e^{x_k}}{x_k^5 + e^{x_k} - 2}$ für $k = 0, 1, \ldots$
- ◯ $x_{k+1} = \dfrac{4x_k^5 + (x_k - 1)\,e^{x_k} + 2}{5x_k^4 + e^{x_k}}$ für $k = 0, 1, \ldots$
- ◯ $x_{k+1} = \dfrac{6x_k^5 + (x_k - 1)\,e^{x_k} + 2}{5x_k^4 + e^{x_k}}$ für $k = 0, 1, \ldots$

MC 5-4
Es sei $f(x) = e^x + x - 2$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle in $[0, 1]$.
- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle in $\mathbb{R}$.
- ◯ Das Newton–Verfahren konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$.
- ◯ Das Newton–Verfahren konvergiert nur für Startwerte x_0, die hinreichend nahe der Nullstelle sind.

MC 5-5
Beim Newton–Verfahren wird oft eine Dämpfungsstrategie benutzt. Diese dient dazu,

- ◯ die Stabilität des Verfahrens zu verbessern.
- ◯ globale Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.
- ◯ den Einzugsbereich des Verfahrens zu vergrößern.

◯ die Berechnung von Ableitungen zu vermeiden.

MC 5-6
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nicht–singuläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) := A\,x + b$. Zu einem gegebenen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ lautet die erste Iterierte des Newton–Verfahrens angewandt auf f:

◯ $x_1 = -A^{-1}\,b$

◯ $x_1 = x_0 - (A\,x_0 + b)$

◯ $x_1 = A\,x_0 + b$

Das Newton–Verfahren für diese Funktion konvergiert — bei beliebigem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ —

◯ in einem Schritt.

◯ in n Schritten.

◯ nur, falls $\|A\| < 1$.

◯ nicht in endlich vielen Schritten.

◯ u.U. gar nicht.

MC 5-7
Kreuzen Sie das effizienteste unter den folgenden Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an!

◯ Bisektion

◯ Newton–Verfahren

◯ Sekanten–Verfahren

MC 5-8
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zur Berechnung einer Nullstelle von f verwendet man das Newton–Verfahren, bei dem jedoch die linearen Gleichungssysteme (die in jedem Schritt gelöst werden müssen) nur **approximativ** gelöst werden. Für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiere die Folge dieser Iterierten gegen ein $x^\star \in \mathbb{R}^n$. Dann

◯ konvergiert das Verfahren u.U. langsamer als das exakte Newton–Verfahren, aber es gilt $f(x^\star) = 0$.

◯ konvergiert das Verfahren genauso schnell wie das exakte Newton–Verfahren, wobei $x^\star$ i.A. keine exakte Nullstelle von f ist, jedoch $\|f(x^\star)\|$ umso kleiner wird, je genauer man die linearen Gleichungssysteme löst.

◯ kann man nichts über die Größe von $\|f(x^\star)\|$ aussagen.

MC 5-9
Für eine kontrahierende Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Kontraktionszahl $\frac{1}{2}$ gelte für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|\Phi(x_0) - x_0\| \le 16$. Es werde gemäß $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ iteriert; dann gilt mit dem Fixpunkt $x^\star$ von Φ die Abschätzung $\|x_k - x^\star\| \le 2^{-10}$, für:

◯ $k = 15$.

◯ $k = 20$ aber nicht für $k = 15$.

◯ $k = 25$ aber nicht für $k = 20$.

◯ $k = 30$ aber nicht für $k = 25$.

MC 5-10
Die Funktion $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ hänge teilweise linear von ihren Variablen ab, genauer habe sie die Form

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} A\,x - b \\ C\,x + g(y) \end{pmatrix}$$

und einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ und invertierbaren Matrizen A, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Iterationen entsprechen dem Newton–Verfahren für f ?

- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\, b$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\, (C\, x_{k+1} + g(y_k))$
- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\, (b - x_k)$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\, C^{-1}\, (x_k + g(y_k))$
- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\, (b - x_k)$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\, \left(C^{-1}\, x_k + g(y_k)\right)$
- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\, (b - x_k)$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\, (x_{k+1} + g(y_k))$

MC 5-11
Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x^* und mit Konvergenzordnung genau 1. Sei $A_k := \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$, $(k \geq 2)$. Welche der folgenden Größen liefert eine brauchbare Schätzung von $e_k = x^* - x_k$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $x_k - x_{k-1}$
- ◯ $A_k(x_k - x_{k-1})$
- ◯ $\dfrac{A_k}{1 - A_k}(x_k - x_{k-1})$
- ◯ $(x_k - x_{k-1})^2$

MC 5-12
Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x^* und mit Konvergenzordnung $p > 1$. Sei $A_k := \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$, $(k \geq 2)$. Welche der folgenden Größen liefert eine brauchbare Schätzung von $e_k = x^* - x_k$? Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $x_k - x_{k-1}$
- ◯ $(x_k - x_{k-1})^2$
- ◯ $x_{k+1} - x_k$
- ◯ $\dfrac{A_k}{1 - A_k}(x_k - x_{k-1})$

MC 5-13
Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$ mit Grenzwert x^* und mit Konvergenzordnung $p > 1$. Sei $e_k = x^* - x_k$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|e_k\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|$ für k hinreichend groß und $p = 1$.
- ◯ $\|e_k\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|$ für k hinreichend groß und $p > 1$.
- ◯ $\|e_k\| \approx \|x_k - x_{k-1}\|$ für k hinreichend groß und $p > 1$.
- ◯ $e_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß und $p > 1$.

MC 5-14
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^*:

$$x_0 \in U, \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für } k \geq 0.$$

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Newton-Methode ist lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Die Newton-Methode ist lokal quadratisch konvergent, falls $f'(x^*) \neq 0$.
- ◯ Es gilt: $x^* - x_k \approx (x^* - x_{k-1})^2$ für k hinreichend groß.
- ◯ Sei $f'(x^*) \neq 0$. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß.

MC 5-15
Sei $f(x) = \cos(x) + e^{(x-\pi)^2}$. Wir betrachten Fixpunktiterationen mit den Iterationsfunktionen $\Phi_1(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $\Phi_2(x) = x - 2\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ in einer Umgebung der Nullstelle $x^* = \pi$ von f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$ stimmt mit der Newton-Methode angewandt auf f überein.
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$ ist 2.
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$ ist 2.
- ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$ ist global konvergent.

MC 5-16
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Wir betrachten die Sekanten-Methode zur Bestimmung von x^*. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Sekanten-Methode ist global konvergent.
- ◯ Die Sekanten-Methode ist lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Die Sekanten-Methode hat eine Konvergenzordnung $p > 1$.
- ◯ Bei der Sekanten-Methode werden Auswertungen von f' vermieden.

MC 5-17
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Wenn $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$ gilt, dann ist f eine Selbstabbildung auf $[a, b]$.
- ◯ Wenn $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist f eine Selbstabbildung auf $[a, b]$.
- ◯ Wenn $f(a) \in [a, b]$, $f(b) \in [a, b]$ und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist f eine Selbstabbildung auf $[a, b]$.
- ◯ Wenn $f'(x) = 0$ für eine $x \in [a, b]$ gilt, dann kann f keine Selbstabbildung auf $[a, b]$ sein.

MC 5-18
Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ und $\|\Phi'(x^*)\|_\infty < 1$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Es gilt $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$.
- ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ konvergiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - x^*\|_\infty$ hinreichend klein.
- ◯ Falls die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ konvergiert, ist die Konvergenzordnung dieser Methode höchstens 1.
- ◯ Es gilt $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty < \|x - y\|_\infty$ für alle $x, y \in B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x^*\|_\infty < \varepsilon\}$ (ε hinreichend klein)

MC 5-19
Wir betrachten das Nullstellenproblem

$$f(x) = x^6 - x - 1 = 0 \qquad \text{für } x \in [0, 2].$$

Die Nullstelle $x^* \in [0, 2]$ soll mit Hilfe einer Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ bestimmt werden. Welche der folgenden Funktionen Φ ist dafür geeignet? Kreuzen Sie alle korrekten Möglichkeiten an.

- ◯ $\Phi(x) = (x + 1)^{\frac{1}{6}}$.
- ◯ $\Phi(x) = x^6 - 1$.

- ◯ $\Phi(x) = \frac{1}{2}x$.
- ◯ $\Phi(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$.

MC 5-20
Zur Bestimmung von $\sqrt{5}$ wird die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 5$ berechnet. Dazu verwenden wir eine Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Welche der folgenden Funktionen ergibt eine konvergente Fixpunktiteration? Kreuzen Sie alle korrekten Möglichkeiten an.

- ◯ $\Phi(x) = 5 + x - x^2$.
- ◯ $\Phi(x) = \frac{5}{x}$.
- ◯ $\Phi(x) = 1 + x - \frac{1}{5}x^2$.
- ◯ $\Phi(x) = \frac{1}{2}(1 + x)$.

MC 5-21
Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.
- ◯ Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.
- ◯ Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ◯ Die Fixpunktiteration ist lokal quadratisch konvergent.

MC 5-22
Sei $f(x) = x^2 - 5$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle in $[0, \infty)$.
- ◯ Das Newton-Verfahren angewandt auf f konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$.
- ◯ Das Newton-Verfahren angewandt auf f konvergiert nur für Startwerte $x_0 > 0$, die hinreichend nahe der Nullstelle sind.
- ◯ Sei $x^* = \sqrt{5}$ und $(x_k)_{k\geq 0}$ die mit der Newton-Methode berechnete Folge. Für $x_0 > x^*$ gilt $x_k > x^*$ für alle $k \geq 1$.

MC 5-23
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und x^* eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Bestimmung von x^*. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Beim Sekantenverfahren wird die Auswertung von f' vermieden.
- ◯ Beim Sekantenverfahren werden zwei Startwerte in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* benötigt.
- ◯ Beim Sekantenverfahren werden zwei Startwerte in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* benötigt, wobei der eine links von x^* und der andere rechts von x^* liegen muss.
- ◯ Die Konvergenzordnung des Sekantenverfahrens ist 1.

MC 5-24
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ hinreichend oft differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $f(x^*) = 0,\ \det(f'(x^*)) \neq 0$. Sei $\Phi(x) := x - (f'(x))^{-1}f(x)$ mit x aus einer hinreichend kleinen Umgebung U von x^*. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ x_0 \in U$, ist gerade die Newton-Methode.
- ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ist lokal konvergent mit Konvergenzordnung (mindestens) 2.
- ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ist lokal konvergent mit Konvergenzordnung genau 1.

- ◯ Bei der Durchführung der Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ muss in jeder Iteration die Inverse der Jacobi-Matrix $f'(x_k)$ berechnet werden.

MC 5-25
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $f(x^*) = 0,\ f'(x^*) \neq 0$. Sei x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Sei $e_k = x^* - x_k$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $e_k \approx x_k - x_{k-1}$ für k hinreichend groß.
- ◯ $e_{k+1} \approx c \cdot e_k^2$, mit einer Konstanten c und k hinreichend groß.
- ◯ $e_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß.
- ◯ $e_{k+1} \approx c \cdot e_k$, mit einer Konstanten $c \in (-1, 1)$ und k hinreichend groß.

MC 5-26
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ hinreichend oft differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $f(x^*) = 0,\ \det(f'(x^*)) \neq 0$. Sei x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und $x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Sei $e_k = x^* - x_k$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|e_{k+1}\| \leq c \cdot \|e_k\|^2$ für $k \geq 0$ und mit einer Konstanten c.
- ◯ $\|e_k\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|$ für k hinreichend groß.
- ◯ $\|e_k\| \approx \|x_k - x_{k-1}\|$ für k hinreichend groß.
- ◯ $\|e_k\| \approx \|x_k - x_{k-1}\|^2$ für k hinreichend groß.

MC 5-27
Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Hierbei sei $\|x^k - x^*\|$ die Norm des Fehlers in Iterationsschritt k, und die Konvergenzordnung des Iterationsverfahrens sei die größte Zahl $p \geq 1$, für die ein $C > 0$ existiert, so dass $\|x^{k+1} - x^*\| \leq C\|x^k - x^*\|^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $p > 1$ bedeutet, dass sich $\|x_k - x^*\|$ von Iteration zu Iteration asymptotisch jeweils um den Faktor p verringert.
- ◯ $p > 1$ bedeutet, dass sich die Anzahl korrekter Stellen (d. h. der Logarithmus von $\|x_k - x^*\|$) von Iteration zu Iteration asymptotisch jeweils um den Faktor p vergrössert.
- ◯ Im Falle $p = 1$ ist $C < 1$ hinreichend für Konvergenz.
- ◯ Im Falle $p > 1$ gibt es auch bei beliebig großem C stets einen Startwert x^0, mit dem das Verfahren konvergiert.
- ◯ Bei gleichem Startwert erreicht ein Verfahren höherer Ordnung (d. h. größerem p) die Zielgenauigkeit stets nach weniger Schritten als ein Verfahren niedrigerer Ordnung.
- ◯ Das Sekantenverfahren hat eine höhere Konvergenzordnung als das vereinfachte Newtonverfahren und das Bisektionsverfahren.

MC 5-28
Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{R}$ selbstabbildend und kontraktiv, so konvergiert zu jedem beliebigen Startwert $x^0 \in E$ die Folge $x^k := \Phi(x^{k-1})$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.
- ◯ Ist die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf einer abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ selbstabbildend und kontraktiv, so konvergiert zu jedem beliebigen Startwert $x^0 \in E$ die Folge $x^k := \Phi(x^{k-1})$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.
- ◯ Damit die stetig differenzierbare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf einer abgeschlossenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ kontraktiv ist, ist es hinreichend, dass $\|\Phi'(x)\| \leq L < 1$ für alle $x \in E$ gilt und E konvex ist.

- ◯ Sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, so gilt beim Fixpunktverfahren stets $\|x^k - x^*\| < \|x^{k-1} - x^*\|$.
- ◯ Sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, so gilt beim Fixpunktverfahren stets $\|x^k - x^*\| < \|x^k - x^{k-1}\|$.
- ◯ Sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, so gilt beim Fixpunktverfahren stets $\|x^{k+1} - x^k\| < \|x^k - x^{k-1}\|$.

MC 5-29
Das skalare Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Hierbei sei $x^k - x^*$ der Fehler in Iterationsschritt k. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Mit $\overline{x^k} := \frac{x^k + x^{k-1}}{2}$ gilt beim Bisektionsverfahren stets $|\overline{x^k} - x^*| \le 2^{-k}|x^1 - x^0|$.
- ◯ Beim Bisektionsverfahren gilt stets $|x^k - x^*| \le |x^k - x^{k-1}|$.
- ◯ Beim Sekantenverfahren gilt stets $|x^k - x^*| \le |x^k - x^{k-1}|$.
- ◯ Beim Newtonverfahren gilt stets $|x^k - x^*| \le |x^k - x^{k-1}|$.
- ◯ Beim Bisektionsverfahren gilt stets $|x^{k+1} - x^k| \le |x^k - x^{k-1}|$.
- ◯ Beim Sekantenverfahren gilt stets $|x^{k+1} - x^k| \le |x^k - x^{k-1}|$.
- ◯ Beim Newtonverfahren gilt stets $|x^{k+1} - x^k| \le |x^k - x^{k-1}|$.

MC 5-30
Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Unabhägig vom gewählten Startwert konvergiert das Newtonverfahren stets quadratisch.
- ◯ Das Newtonverfahren $f'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -f(x^k)$ konvergiert unabhängig von der Ordnung der Nullstelle x^* stets quadratisch.
- ◯ In einer gewissen Umgebung der Nullstelle x^* der Ordnung m konvergiert das Newtonverfahren $f'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -m \cdot f(x^k)$ stets quadratisch.
- ◯ Das Newtonverfahren $f'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -f(x^k)$ kann man als Fixpunktverfahren $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ mit $\Phi(x) := x - f'(x)^{-1}f(x)$ interpretieren, das wegen $\Phi'(x^*) = 0$ lokal quadratisch konvergiert.
- ◯ Beim Newtonverfahren gilt stets $\|x^{k+1} - x^k\| \le \|x^* - x^k\|$.

MC 5-31
Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Bei mehrdimensionalen Problemen erfordert das Newton-Verfahren in jedem Iterationsschritt das Lösen eines linearen Gleichungssystems.
- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren trägt seinen Namen, weil es stets ohne die Lösung eines linearen Gleichungssystems auskommt.
- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren trägt seinen Namen, weil in jedem Schritt immer dieselbe Jacobi-Matrix verwandt wird.
- ◯ Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle der linearen Näherung an die Funktion f im Punkt x^k.
- ◯ Beim Sekanten-Verfahren für skalare Probleme ist x^{k+1} die Nullstelle der Sekante durch die Punkte $(x^k, f(x^k))$ und $(x^{k-1}, f(x^{k-1}))$.