Numerische Mathematik I für Ingenieure, SS 2007
Multiple-Choice-Aufgaben

MC 8-1
Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j\, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade n. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\left\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\right\}$ bildet eine Basis von Π_n.
- ◯ $\left\{\alpha_0,\, \alpha_1 x,\, \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.
- ◯ $\left\{1,\, x-\alpha_1,\, (x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\, \ldots,\, \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.
- ◯ Der Raum Π_n hat die Dimension n.

MC 8-2
Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten
$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $P(\Phi \mid x_0, \ldots, x_n) = \Phi$ für alle $\Phi \in \Pi_n$
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ ist ein Polynom vom Grade n
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man mit dem Neville–Aitken–Schema bestimmen

MC 8-3
Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten
$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.
Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ Es gilt immer $\delta_n = 1$
- ◯ $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$
- ◯ $\delta_0 = f(x_0)$
- ◯ $[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$

MC 8-4
Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten
$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$;
weiter sei f eine beliebig glatte Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Horner–Schema bestimmen.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit der Newton'schen Interpolationsformel bestimmen.
- ◯ Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) \right|$ wird für hinreichend großes n beliebig klein.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ mit einem geeigneten $\delta_n \in \mathbb{R}$.

MC 8-5
Es seien $l_{jn}(x),\ j = 0, \ldots, n$ die Lagrange'schen Fundamentalpolynome zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ mit $n \ge 2$. Es sei $p(x) := \sum_{j=0}^n l_{jn}(x)\, x_j^2$. Dann hat $p(x)$ die Darstellung $\sum_{j=0}^n \alpha_j\, x^j$. Wie lauten die untersten 3 Koeffizienten $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$?

- ◯ $(0, 0, 1)$
- ◯ $(0, 1, 1/2)$

- ◯ $(0, n, 0)$
- ◯ $(0, 0, n/2)$
- ◯ diese hängen von $x_0, \ldots, x_n$ ab.

MC 8-6
Wie lautet das Interpolationspolynom 3. Grades zu den Daten $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$?

- ◯ $x+1$
- ◯ x^3+x^2+x+1
- ◯ x^3+1
- ◯ $x(x-1)(x-2)+1$

MC 8-7
Sie benötigen eine Approximation von $f^{(n)}(x)$ für $x_1 < x < x_{n-1}$, wobei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$. Welche der folgenden Ausdrücke gibt die beste Approximation an $f^{(n)}(x)$?

- ◯ $[x_0, \ldots, x_n]\, f$
- ◯ $[x_1, \ldots, x_{n-1}]\, f$
- ◯ $n!\, [x_0, \ldots, x_n]\, f$
- ◯ $(n-2)!\, [x_1, \ldots, x_{n-1}]\, f$

MC 8-8
Es sei $p(x)$ das Interpolationspolynom zu den Daten
$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, wobei $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ sei.
Dann gilt für den Interpolationsfehler $|p(x) - f(x)|$ an einer Stelle $x < x_0$:

- ◯ $|p(x) - f(x)| \leq \left(\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|\right) \cdot \dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}$ für ein $\xi \in (x_0, x_n)$
- ◯ $|p(x) - f(x)| \leq \left(\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|\right) \cdot \dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}$ für ein $\xi \in (x, x_n)$
- ◯ $|p(x) - f(x)| \leq \left(\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|\right) \cdot \dfrac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{(n)!}$ für ein $\xi \in (x_0, x_n)$
- ◯ $|p(x) - f(x)| \leq \max\limits_{\theta \in (x_0, x_n)} \left|\prod_{j=0}^{n} (\theta - x_j)\right| \cdot \max\limits_{\xi \in (x_0, x_n)} \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}$

MC 8-9
Sei $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1, \quad f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 2\frac{1}{2},\ f(x_2) = 3$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(f \mid x_0)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ◯ $P(f \mid x_0, x_2)(\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{2}$.
- ◯ $P(f \mid x_0, x_1, x_2)(\frac{3}{4}) = 2\frac{3}{4}$.
- ◯ $P(f \mid x_2, x_1, x_0)(\frac{3}{4}) = 2\frac{3}{4}$.

MC 8-10
Sei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = [x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]f$.
- ◯ $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ ist der führende Koeffizient des Polynoms $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$.
- ◯ $[x_1, x_0]f = f(x_1) - f(x_0)$.

- ◯ $[x_0, x_1, x_2]f$ ist ein Polynom vom Grad 2.

MC 8-11
Sei $x_0 < x_1 < x_2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(f \mid x_0, x_1, x_2)(x) = P(f \mid x_0, x_1)(x) + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1]f$.
- ◯ $P(f \mid x_0, x_1, x_2)(x) = P(f \mid x_0, x_1)(x) + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f$.
- ◯ $P(f \mid x_0, x_1, x_2)(x) = [x_0]f + x[x_0, x_1]f + x^2[x_0, x_1, x_2]f$.
- ◯ $[x_0, x_1, x_2]f = [x_0, x_1]f - [x_1, x_2]f$.

MC 8-12
Sei $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige glatte Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ kann man effizient über das Aitken-Neville-Schema bestimmen.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ mit $\delta_n \in \mathbb{R}$.
- ◯ $\max_{x \in [a,b]} |P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.
- ◯ $\max_{x \in \mathbb{R}} |P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n+1)}(x)|$.

MC 8-13
Sei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $P(f \mid x_0, \ldots x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_0), \ldots, f(x_n)$. Seien l_{jn} $(0 \leq j \leq n)$ die Lagrange-Fundamentalpolynome. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $l_{jn}(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$.
- ◯ $l_{jn}(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots x_n) = \sum_{j=0}^{n} f(x) l_{jn}(x_j)$.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots x_n) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_{jn}(x)$.