Numerische Mathematik I für Ingenieure, SS 2007
Multiple-Choice-Aufgaben

MC 8-1
Es sei $I := \int_c^d f(x)\,dx$, $h := d-c$, $m > 0$ und $x_j = c + \frac{j\,h}{m}$ für $j = 0,\ldots,m$. Wir definieren $I_m(f) := \displaystyle\int_c^d P(f \mid x_0,\ldots,x_m)(x)\,dx$ wobei $P(f \mid x_0,\ldots,x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)),\ldots,(x_n, f(x_m))$ mit $x_0 < \ldots < x_m$ ist.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ○ $I_m(f)$ definiert die Newton–Côtes–Formel zur Approximation von I.
- ○ $I_1(f) = \frac{h}{2}\big(f(c) + f(d)\big)$.
- ○ $I_m(q) = \int_c^d q(x)\,dx$ für alle Polynome q.
- ○ $\big|I - I_m(f)\big| \leq C\,h^m$ mit einer von h und f unabhängigen Konstanten C.

MC 8-2
Es sei $I := \int_c^d f(x)\,dx$ und $I_m(f) = \sum_{i=0}^m w_i\,f(x_i)$ eine Quadraturformel zur Approximation von I.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ○ Wenn $I_m(f)$ einer Newton–Côtes–Formel entspricht, so sind die Stützstellen x_i äquidistant.
- ○ Wenn $I_m(f)$ einer Gauß–Quadratur entspricht, so sind die Stützstellen x_i äquidistant.
- ○ Wenn $I_m(f)$ einer Newton–Côtes–Formel entspricht, so sind die Gewichte w_i stets positiv.
- ○ Wenn $I_m(f)$ einer Gauß–Quadratur entspricht, so sind die Gewichte w_i stets positiv.

MC 8-3
Das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ lässt sich durch eine einfache Substitution überführen in

- ○ $\displaystyle 2\int_0^1 \cos(y^2)\,dy$
- ○ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(y)}{y}\,dy$
- ○ $\displaystyle\int_0^1 \cos(y^2)\,dy$

MC 8-4
Eine Gauß–Quadratur–Formel mit $m+1$ Funktionsauswertungen ist exakt für Polynome vom Grade

- ○ $m+1$
- ○ $2m$
- ○ $2m+1$
- ○ $2m+2$

MC 8-5
Eine einfache Gauß–Quadratur–Formel für das Integral $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ ist gegeben durch $I_g(f) = f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. Das Integral $\int_0^\pi f(x)\,dx$ soll mit einer geeignet transformierten Form dieser Quadratur–Formel approximiert werden. Wie lautet diese Form?

- ○ $\displaystyle\frac{\pi}{2}\left(f(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,\pi) + f(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\,\pi)\right)$
- ○ $\displaystyle\frac{2}{\pi}\left(f(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,\pi) + f(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\,\pi)\right)$

- ◯ $\frac{\pi}{2}\left(f(\frac{-\pi}{\sqrt{3}}) + f(\frac{\pi}{\sqrt{3}})\right)$
- ◯ $\frac{2}{\pi}\left(f(\frac{-\pi}{\sqrt{3}}) + f(\frac{\pi}{\sqrt{3}})\right)$

MC 8-6
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \le x_0 < \ldots < x_m \le d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j.
- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln gilt stets $x_0 = c$ und $x_m = d$.
- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.
- ◯ Bei Gauß-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j von der Funktion f ab.
- ◯ Bei Gauß-Quadraturformeln sind die Stützstellen x_j stets äquidistant.

MC 8-7
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f) := (d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \le x_0 < \ldots < x_m \le d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln gilt stets $c_j = \frac{1}{d-c}\int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^m \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,\mathrm{d}x$.
- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln gilt unabhängig von f stets $I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)\,\mathrm{d}x$, wobei $P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)$ das Interpolationspolynom an f mit äquidistanten Stützstellen x_j ist.
- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade $\le m$.
- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln gilt für den Fehler stets $|I_{m+1}(p) - I(p)| \le |I_m(p) - I(p)|$, wenn p ein Polynom vom Grad $\ge m+3$ ist.

MC 8-8
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) := (d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \le x_0 < \ldots < x_m \le d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Aus $Q_m(f) := \int_c^d P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)\,\mathrm{d}x$, wobei $P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)$ das Interpolationspolynom an f zu den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_m$ ist, folgt $I(p) = Q_m(p)$ für alle Polynome p vom Grade $\le m$.
- ◯ Wenn $I(p) = Q_m(p)$ für alle Polynome p vom Grade $\le m$ gilt, folgt stets
  $c_j = \frac{1}{d-c}\int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^m \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,\mathrm{d}x$.
- ◯ Mit der summierten Trapezregel SI_1 (hier mit zwei Teilintervallen der Länge $h := \frac{b-a}{2}$) und der Simpson-Regel I_2 gilt stets $|I_2(p) - I(p)| \le |SI_1(p) - I(p)|$, wenn p ein Polynom vom Grad ≤ 3 ist.
- ◯ Mit der summierten Newton-Cotes-Formel SI_m vom Grad m (mit n Teilintervallen der Länge $h := \frac{b-a}{n}$) und der Newton-Cotes-Formel I_{m+1} vom Grad $m+1$ gilt stets $|I_{m+1}(p) - I(p)| \le |SI_m(p) - I(p)|$, wenn p ein Polynom vom Grad $\le m+1$ ist.

MC 8-9
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Gauß-Quadraturformel $G_m(f) := (d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \le x_0 < \ldots < x_m \le d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Bei Gauß-Quadraturformeln gilt stets $c_j = \frac{1}{d-c}\int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^m \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,\mathrm{d}x$.

- ◯ Durch geeignete Wahl der Stützstellen x_j und Gewichte c_j kann man erreichen, dass $G_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade $\leq 2m+1$ gilt.

- ◯ Bei Gauss-Quadraturformeln gilt für den Fehler stets $|G_{m+1}(p) - I(p)| \leq |G_m(p) - I(p)|$, wenn p ein Polynom vom Grad $\geq 2m+4$ ist.

- ◯ Mit der Gauß-Quadraturformel G_1 und der Simpsonregel I_2 gilt stets $|G_1(p) - I(p)| = |I_2(p) - I(p)|$, wenn p ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.

- ◯ Mit der Gauß-Quadraturformel G_2 und der Simpsonregel I_2 gilt stets $|G_2(p) - I(p)| \leq |I_2(p) - I(p)|$, wenn p ein Polynom vom Grade ≤ 5 ist.