Numerische Mathematik I für Ingenieure
Multiple-Choice Klausuraufgaben

Klausur H07:

MC K07H -1

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Addition zweier betragsmäßig nahezu gleich großer Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen ist schlecht konditioniert.
- ◯ Die Multiplikation zweier nahezu gleich großer Zahlen ist schlecht konditioniert.
- ◯ Die Auswertung der Funktion $x\,\mathrm{e}^x$ ist gut konditioniert für alle x mit $|x| \leq 1$.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken.

MC K07H -2

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und $\alpha > 0$. Dann gilt für die relativen Konditionszahlen $\kappa_{\text{rel}}(f, x) := \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$:

- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(\alpha f, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)$
- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(f + g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$
- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(f * g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) * \kappa_{\text{rel}}(g, x)$
- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(f/g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)/\kappa_{\text{rel}}(g, x)$

MC K07H -3

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe (in der betrachteten Matrixnorm) die Konditionszahl $\kappa(A)$. Die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ sei mit einem relativen Fehler ε behaftet. Bei der Berechnung von $x := A^{-1}b$ muss man mit einem relativen Fehler in der folgenden Größenordnung rechnen:

- ◯ $\|A\|\,\varepsilon$
- ◯ $\kappa(A)\,\varepsilon$
- ◯ $\kappa(A^{-1})\,\varepsilon$
- ◯ $\|A^{-1}\|\,\varepsilon$

MC K07H -4

Welche der folgenden Aussagen für Zerlegungen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind korrekt?

- ◯ Ist A invertierbar, so existiert eine LR–Zerlegung mit $A = LR$.
- ◯ A besitzt immer eine QR–Zerlegung.
- ◯ Zur Berechnung der QR-Zerlegung einer dünnbesetzten Matrix ist das Verfahren mittels Givens–Rotationen i.A. effizienter als das Verfahren mittels Householder–Spiegelungen.
- ◯ Ist A symmetrisch positiv definit, so gilt für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n :\ x^T A^{-1} x > 0$.

MC K07H -5

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ A hat nur positive Eigenwerte.
- ◯ Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.
- ◯ Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.
- ◯ Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $d_{i,i} > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.

MC K07H -6
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Ferner bezeichne $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm, und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ A^T ist ebenfalls orthogonal.
- ◯ A ist stets symmetrisch.
- ◯ $\|A\,x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ $\kappa_2(A) = 1$

MC K07H -7
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit zugehöriger rechter oberer Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Orthogonalmatrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so dass $A = QR$ gilt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\det A = \det R$
- ◯ $\|A\|_2 = \|R\|_2$
- ◯ Q und R kann man mit Gauß-Eliminationen und Pivotisierung bestimmen.
- ◯ Q und R kann man mit Householder-Reflektionen bestimmen.

MC K07H -8
Mit $m > n$ sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten und

$$QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Mit $b \in \mathbb{R}^m$ sei ferner x^* die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\tilde{R}$ ist invertierbar.
- ◯ $A^{-1} = \tilde{R}^{-1}Q$
- ◯ $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$
- ◯ $x^* = \tilde{R}^{-1}Qb$

MC K07H -9
Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Wegen $\kappa_2(A^TA) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung des Ausgleichsproblems immer ungeeignet.
- ◯ Die Normalgleichungen lassen sich mit dem Cholesky-Verfahren lösen, nicht aber mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung.
- ◯ Mit der Cholesky-Zerlegung $A^TA = LDL^T$ gilt stets $L^Tx^* = D^{-1}y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = A^Tb$ ist.
- ◯ Es gilt stets $\|Ax^* - b\|_2 = \|LDL^Tx^* - A^Tb\|_2$.

MC K07H -10
Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein ist.
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.
- ◯ Das Fixpunktverfahren lässt sich stets auch als Newton-Verfahren für ein entsprechendes Nullstellenproblem interpretieren.
- ◯ Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.

MC K07H -11
Beim Newton-Verfahren wird oft eine Dämpfungsstrategie benutzt. Diese dient dazu,

- ◯ die Konvergenzordnung des Verfahrens zu verbessern.
- ◯ für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.
- ◯ die Menge der Startwerte, für die das Verfahren konvergent ist, zu vergrößern.
- ◯ Auslöschungseffekte bei der Berechnung der Korrektur zu dämpfen.

MC K07H -12
x^* sei eine Nullstelle der Funktion $f(x) := \mathrm{e}^{-x} - 2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$.
- ◯ Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ◯ Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert nur für Startwerte x_0, für die $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein ist.
- ◯ Mit $x_0 < x^*$ gilt für die mit der Newton-Methode berechnete Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ auch $x_k < x^*$ für alle $k \geq 1$.

MC K07H -13
Seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = [x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f$.
- ◯ $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ ist der führende Koeffizient des Polynoms $P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})$.
- ◯ $[x_i]f = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$.
- ◯ Mit $f(x) := x^5$ gilt $[x_0, \ldots, x_n]f = 1$ für alle $n \geq 5$.

MC K07H -14
Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und f sei eine beliebig glatte Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit der Newton'schen Interpolationsformel bestimmen.
- ◯ $\max\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x) - P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)\right| \leq (b-a) \max\limits_{x\in[a,b]\cup[x_0,x_n]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n x^n$ mit einem geeigneten $\delta_n \in \mathbb{R}$

MC K07H -15
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \leq x_0 < \ldots < x_m \leq d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j.
- ◯ Bei Gauß-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j von der Funktion f ab.
- ◯ Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.
- ◯ Die Gauß-Quadraturformeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq 2m+1$ ist.