Numerische Mathematik I für Ingenieure
Multiple-Choice Klausuraufgaben

MC K08F -1
Es sei $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Menge der Maschinenzahlen mit Basis $b \in \mathbb{N}$, Mantissenlänge $m \in \mathbb{N}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ mit $r \leq e \leq R$, und relativer Maschinengenauigkeit eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$. Ferner sei $\mathrm{fl}: \mathbb{R} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundungsabbildung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $|\mathrm{fl}(x) - x| \leq \mathrm{eps}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ◯ $\left|\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right| \leq \mathrm{eps}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.
- ◯ Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \leq \mathrm{eps}$ und $\mathrm{fl}(x) = (1+\varepsilon)x$.
- ◯ Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \leq \mathrm{eps}$ und $\mathrm{fl}(x) = x + \varepsilon$.

MC K08F -2
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Multiplikation zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion ist stets größer als 1.
- ◯ Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Lösungsverfahren.
- ◯ Die Funktion $f(x,y) := x + y$ ist gut konditioniert für alle $x > 0, y > 0$.

MC K08F -3
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$, und $\kappa_2(A)$ bezeichne die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\kappa_2(A) \geq 1$.
- ◯ $\kappa_2(\alpha A) = \kappa_2(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
- ◯ $\kappa_2(A^{-1}) = \kappa_2(A)^{-1}$.
- ◯ $\kappa_2(A) = 1$ falls A orthogonal ist.

MC K08F -4
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.
- ◯ Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.
- ◯ Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $|\det(A)| = |\det(R)|$.
- ◯ $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\right|$.

MC K08F -5
Es seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $A = Q\,R$. Ferner bezeichne $\kappa_2(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = R^T Q^T$.
- ◯ Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.
- ◯ Nicht alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzen eine QR-Zerlegung.
- ◯ Eine QR-Zerlegung kann man stets auf stabile Weise mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.

MC K08F -6
Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^Tv}$.
◯ Es gilt stets $||Q||_2 = 1$.
◯ Es gilt stets $Q = Q^T$.
◯ Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^Tv = 0$ gilt: $Qy = y$.

MC K08F -7
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Alle Eigenwerte von A^TA sind größer als 0.
◯ Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist A^TA symmetrisch positiv definit.
◯ Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.
◯ Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.

MC K08F -8
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist proportional zu $m^2\,n$.
◯ Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist proportional zu $n^2\,m$.
◯ Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.
◯ Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen benötigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.

MC K08F -9
Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, die Cholesky-Zerlegung $A^TA = LDL^T$ und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Es gilt $L^Tx^* = D^{-1}y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist.
◯ Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen.
◯ Wenn die Spalten von A orthonormal sind, dann ist x^* auch die Lösung von $\|x - A^T\,b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$.
◯ Es gilt stets $\|LDL^Tx^* - A^Tb\|_2 = 0$.

MC K08F -10
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.
◯ Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|_2$ hinreichend klein.
◯ $\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ existiert.
◯ Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.

MC K08F -11
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Wenn $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f.
- ◯ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f.
- ◯ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = a$ eine monoton steigende Folge.
- ◯ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann liefert das Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = (a + b)/2$ die in $[a, b]$ eindeutige Nullstelle $f(x^*) = 0$.

MC K08F -12
Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ mit Nullstelle x^* soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das gedämpfte Newton-Verfahren benötigt zwar stets mehr Iterationen als das (normale) Newton-Verfahren, konvergiert dafür aber für eine größere Menge von Startwerten.
- ◯ Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle der linearen Näherung an die Funktion f im Punkt x^k.
- ◯ Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so existiert auch eine Fixpunktiteration, mit der man die Nullstelle x^* von f berechnen kann und die für alle Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen, quadratisch konvergiert.
- ◯ Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch für alle Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen.

MC K08F -13
Mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $0 \leq j \leq k \leq n$ sei $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f$ eine dividierte Differenz von $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$, und $p_n(x)$ das Newton-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = \frac{f^{(k-j)}(\xi)}{(k-j)!}$ mit $\xi \in [x_j, x_k]$.
- ◯ $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = 0$ falls f ein Polynom vom Grade $\leq (k - j)$ ist.
- ◯ Es gilt stets $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]p_n = 0$.
- ◯ Wegen $p_n(x_j) = f(x_j)\ \forall j = 0, \ldots, n$ gilt stets $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = [x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]p_n$.

MC K08F -14
Mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $f \in C^{(n+1)}(\mathbb{R})$ sei $p_n(x)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Lagrange-Interpolationspolynom $p_n(x)$ ist stets identisch mit dem Newton-Interpolationspolynom zu denselben Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.
- ◯ Das Neville-Aitken Schema dient dazu, das Lagrange-Interpolationspolynom punktweise auszuwerten.
- ◯ Zur nachträglichen Hinzunahme einer zusätzlichen Stützstelle muss ein bereits berechnetes Neville-Aitken-Schema lediglich um eine zusätzliche Diagonale ergänzt werden.
- ◯ Mit $a < x_0$ und $x_n < b$ sowie $x \in [a, b]$ gilt stets $|f(x) - p_n(x)| \leq \left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$

MC K08F -15
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch geeignete Quadraturformeln. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.
- ◯ Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.
- ◯ Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.
- ◯ Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.