Numerische Mathematik I für Ingenieure
Multiple-Choice Klausuraufgaben Frühjahr 08

Hier einige Hinweise zu den MC-Aufgaben. Die Lösungen sollten nicht auswendig gelernt werden. Man sollte verstehen, warum die entsprechenden Aussagen richtig oder falsch sind. Auch ist es für die nächsten Klausuren nicht ausreichend nur diese Aufgaben zu beherrschen. Diese Hinweise sollen nur dazu dienen, die Gerüchte über diese Aufgaben auszuräumen.
Im Folgenden beziehen sich Seitenzahlen pxy auf die Seiten der Folien für Dozenten, (siehe: http://www.igpm.rwth-aachen.de/DahmenReusken) und GB ist die Abkürzung für Gegenbeispiel.
Die Kapitelangaben habe ich unterdrückt. Ferner werden die Teilaufgaben als a), b), c) und d) angenommen.
KHB

MC K08F -1
Es sei $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Menge der Maschinenzahlen mit Basis $b \in \mathbb{N}$, Mantissenlänge $m \in \mathbb{N}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ mit $r \leq e \leq R$, und relativer Maschinengenauigkeit eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$. Ferner seien x_{MIN} die kleinste und x_{MAX} die größte Maschinenzahl sowie $\text{fl} : [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}] \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundungsabbildung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $|\text{fl}(x) - x| \leq \text{eps}$ für alle $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$.
- ⊗ $\left|\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right| \leq \text{eps}$ für alle $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$, $x \neq 0$.
- ⊗ Für jedes $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ existiert eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = (1 + \varepsilon)x$.
- ◯ Für jedes $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ existiert eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \varepsilon$.

a) Mit m Ziffern kann man nicht beliebig große Zahlen mit einem absoluten Fehler von maximal eps annähern.
b) Definition der Maschinengenauigkeit – siehe p39.
c) Dito, folgt auch aus b) .
d) Entspricht a) .

MC K08F -2
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die Multiplikation zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion ist stets größer als 1.
- ◯ Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Lösungsverfahren.
- ⊗ Die Funktion $f(x, y) := x + y$ ist gut konditioniert für alle $x > 0, y > 0$.

a) p21 oder nachrechnen.
b) GB: $f(x) = 4$ hat die Konditionszahl $0 < 1$.
c) Auch für gut konditionierte Probleme gibt es instabile Algorithmen!
d) Gem. pp18: Mit $f(x, y) = x + y$ folgt $\Phi_1(x, y) = 1 \cdot \frac{x}{x+y}$, $\Phi_2(x, y) = 1 \cdot \frac{y}{x+y}$ und wegen $x, y > 0$ liegen beide Werte zwischen 0 und 1.

MC K08F -3
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$, und $\kappa_2(A)$ bezeichne die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $\kappa_2(A) \geq 1$.
- ⊗ $\kappa_2(\alpha A) = \kappa_2(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
- ◯ $\kappa_2(A^{-1}) = \kappa_2(A)^{-1}$.
- ⊗ $\kappa_2(A) = 1$ falls A orthogonal ist.

a) Sollte man wissen, oder: $1 = \|I\|_2 = \|A\, A^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2\, \|A^{-1}\|_2 = \kappa_2(A)$.
b) Folgt aus $\|\alpha\, A\|_2 = |\alpha|\, \|A\|_2$ und $\|\, (\alpha\, A)^{-1}\, \|_2 = \left|\frac{1}{\alpha}\right|\, \|A^{-1}\|_2$.
c) Widerspruch zu a) für $\kappa_2(A) > 1$.
d) A orthogonal $(A^{-1} = A^T) \Rightarrow\ \|A\|_2 = \|A^T\|_2 = 1$ und Definition von $\kappa(A)$.
Nochmal: $A^T A = A\, A^T = I \Rightarrow 1 = \sqrt{\lambda_{max}(I)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sqrt{\lambda_{max}(A\, A^T)}$, also $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 = 1$.

MC K08F -4
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.
- ⊗ Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.
- ⊗ Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $|\det(A)| = |\det(R)|$.
- ◯ $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\right|$.

Siehe auch pp36, ggf. etwas davor.
a) GB: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) $L\,D Ł^T = L\,R$. Siehe auch p59
c) $\det(A) = \det(P^{-1} L\,R) = \pm 1 \det(R)$.
d) Zwei *Fehler*: Nicht $\sum |a_{ji}|$ und Spaltensummen.

MC K08F -5
Es seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $A = Q\,R$. Ferner bezeichne $\kappa_2(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = R^T Q^T$.
- ⊗ Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.
- ◯ Nicht alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzen eine QR-Zerlegung.
- ◯ Eine QR-Zerlegung kann man stets auf stabile Weise mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.

Siehe auch Satz 3.41 pp68.
a) $A^{-1} = R^{-1}Q^T \neq R^T Q^T$.
b) Multiplikation mit orthogonaler Matrix ändert weder 2-Norm noch κ_2.
c) Satz 3.47 p77.
d) *Quatsch*! Weil Dreiecksmatrizen L i.a. nicht orthogonal sind.

MC K08F -6
Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^T v}$.
- ⊗ Es gilt stets $||Q||_2 = 1$.
- ⊗ Es gilt stets $Q = Q^T$.
- ⊗ Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ gilt: $Qy = y$.

Siehe auch E3.50 pp79.
a) Definition: $Q = I - 2\,\frac{v\,v^T}{v^T v}$.
b) Q ist orthogonal. (Gilt auch für Givensrotationen.)
c) E3.50 oder nachrechnen (s. a)): $I^T = I$, $\left(v\,v^T\right)^T = v\,v^T$.
d) Erneut E3.50 oder (s. a)): $Q\,y = y - 2\,\frac{v\,v^T}{v^T v}\,y = y - 2\,\frac{vv^T}{v^T v}\ v^T\,y = y$, da $v^T\,y = y^T\,v = 0$ (ist ein Skalar).

MC K08F -7
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Alle Eigenwerte von $A^T A$ sind größer als 0.
- ⊗ Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.
- ⊗ Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist $A\,A^T$ symmetrisch positiv definit.
- ⊗ Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist $A\,A^T$ invertierbar.

Siehe auch Satz 4.5 p6 und Bem 4.6 p8.
a) Nur wenn A vollen Rang n hat.
b) Jetzt stimmt es. (siehe auch Bem. 3.32 p52
c) Zeilen l.u.: Dann muss $m = n$ sein und auch $A\,A^T$ ist spd. (Setze $B = A^T$ und wende b) an.)
d) Folgt aus c). (spd Matrizen sind regulär.)

MC K08F -8
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $m^2\, n$.

⊗ Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $n^2\, m$.

⊗ Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.

○ Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen benötigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.

a) und b) $A^T A$ ist sym. und hat n^2 Elemente, also müssen $\frac{1}{2}\,n^2$ Skalarprodukte der Länge m berechnet werden.
c) Mit a),b): $\frac{1}{2}\,m\,n^2 > \frac{1}{6}\,n^3$.
d) *Quatsch*! Die Elimination (der dominante Aufwand) ist *halb so teuer*.

MC K08F -9

Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, die Cholesky-Zerlegung $A^T A = L\,D\,L^T$ und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Es gilt $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist.

⊗ Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen.

⊗ Wenn die Spalten von A orthonormal sind, dann ist x^* auch die Lösung von $\|x - A^T\,b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$.

⊗ Es gilt stets $\|LDL^T x^* - A^T b\|_2 = 0$.

a) Zu lösen ist: $L\,D\,L^T x^* = A^T b$, da fehlt also ein A^T.
b) Hatten wir schon in 4b).
d) Es gilt $A^T A\, x^* = A^T b \Rightarrow \|A^T A\, x^* - A^T b\|_2 = 0$.
c) Ist A orthonormal, dann ist $A^T A = I$ und c) folgt aus d).

MC K08F -10

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

○ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.

⊗ Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|_2$ hinreichend klein.

○ $\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ existiert.

⊗ Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.

a) Die Konvergenzordnung kann auch größer sein. Beispiel: $\Phi(x) = 1 + (x-1)^3$ konvergiert mit Ordnung 3 gegen 1 ($x_0 \in (0,1)$).
b) In diesem Fall kann man die Konvergenz durch genügend gute Startwerte *erzwingen*.
Genauer: Wenn $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$ gilt dann gilt auch in einer kleinen (konvexen, abgeschlossenen) Umgebung (Sphere) von x^* die Ungleichung $\|\Phi'(x)\|_2 \leq L < 1$ und somit ist Φ dort kontraktiv und selbstabbildend, weil $\|x_{i+1} - x^*\|_2 = \|\Phi(x_i) - \Phi(x^*)\|_2 < \|x_i - x^*\|_2$; d.h. x_{i+1} liegt dann auch in der Umgebung.
c) GB: $F(x) = 4 + (x-2)\,(x-4)$ und $x_0 = 2 \Rightarrow x_{i>0} = 4$ aber $F'(4) = 2 > 1$.
d) $\Phi(x) = x - (\Phi'(x))^{-1}\,\Phi(x)$.

MC K08F -11

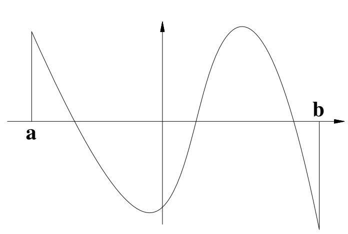
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

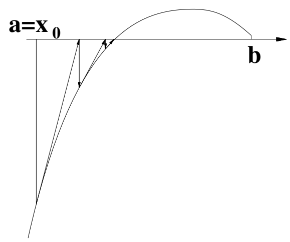
○ Wenn $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$ gilt, dann existiert in $[a,b]$ genau eine Nullstelle von f.

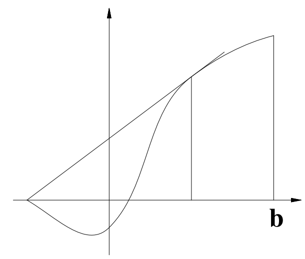
○ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt, dann existiert in $[a,b]$ genau eine Nullstelle von f.

⊗ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = a$ eine monoton steigende Folge.

○ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann liefert das Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = (a+b)/2$ die in $[a,b]$ eindeutige Nullstelle $f(x^*) = 0$.







Alle Antworten kann man sich auch leicht mittels einer geeigneten Skizze klar machen.
a) und b) Siehe Skizze links.
c) Mitte
d) Rechts mit $a = 0$: Wie man sieht kann x_1 außerhalb von $[a, b]$ liegen und eine andere Nullstelle liefern.

MC K08F -12

Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ mit Nullstelle x^* soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Das gedämpfte Newton-Verfahren benötigt zwar stets mehr Iterationen als das (normale) Newton-Verfahren, konvergiert dafür aber für eine größere Menge von Startwerten.
- ⊗ Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle der linearen Näherung an die Funktion f im Punkt x^k.
- ⊗ Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so existiert auch eine Fixpunktiteration, mit der man die Nullstelle x^* von f berechnen kann und die für alle Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen, quadratisch konvergiert.
- ⊗ Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch für alle Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen.

a) Man kann die Lösung ja durch die Dämpfung zufällig exakt treffen, bzw. die Iteration gem. p52 ist identisch mit dem Newton-Verfahren.
b) Das ist die Definition des Newton-Verfahrens.
c) In diesem Fall konvergiert das Newton-Verfahren (als Fixpunktiteration $\Phi(x) = x - (f'(x))^{-1} f(x)$) lokal quadratisch, da $\Phi'(x^*) = 0$.
d) Wie c).

MC K08F -13

Mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $0 \leq j \leq k \leq n$ sei $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f$ eine dividierte Differenz von $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$, und $p_n(x)$ das Newton-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = \frac{f^{(k-j)}(\xi)}{(k-j)!}$ mit $\xi \in [x_j, x_k]$.
- ○ $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = 0$ falls f ein Polynom vom Grade $\leq (k - j)$ ist.
- ○ Es gilt stets $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]p_n = 0$.
- ⊗ Wegen $p_n(x_j) = f(x_j)\ \forall j = 0, \ldots, n$ gilt stets $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = [x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]p_n$.

a) Eigenschaft der dividierten Differenzen. Satz 8.21 (v) p16 mit j bis k statt 0 bis n.
b) Es ist der führende Koeffizient. (Bem. 8.14 p13)
c) Widerspruch zum Polynomgrad $< k - j$ statt n. (Für $j = 0$ und $k = n$ wie b).)
d) Wenn man die selben Stellen mit den selben Funktionswerten noch einmal interpoliert kommt wieder dasselbe raus.

MC K08F -14

Mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $f \in C^{(n+1)}(\mathbb{R})$ sei $p_n(x)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das Lagrange-Interpolationspolynom $p_n(x)$ ist stets identisch mit dem Newton-Interpolationspolynom zu denselben Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.
- ⊗ Das Neville-Aitken Schema dient dazu, das Lagrange-Interpolationspolynom punktweise auszuwerten.

⊗ Zur nachträglichen Hinzunahme einer zusätzlichen Stützstelle muss ein bereits berechnetes Neville-Aitken-Schema lediglich um eine zusätzliche Diagonale ergänzt werden.

○ Mit $a < x_0$ und $x_n < b$ sowie $x \in [a, b]$ gilt stets $|f(x) - p_n(x)| \leq \left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$

a) Eindeutigkeit der Polynominterpolation.
b) Klar. (Übung und p7)
c) Wie b).
d) Das Maximum muss über $[a, b]$ bestimmt werden. (Übung und p19)

MC K08F -15

Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch geeignete Quadraturformeln. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.

○ Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.

○ Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.

⊗ Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.

a) Aus dem Verhältnis der Fehlerschranken kann man nicht auf das Verhältnis der tatsächlichen Fehler schließen.
Bem.: b)-d) folgen auch aus den Fehlerabschätzungen – die höheren Ableitungen der Polynome sind erst dann identisch 0.
b) und c) Mittelpunktsregel und summierte Mittelpunktsregel sind exakt für Polynom vom Grade ≤ 1.
d) Stimmt.