Numerische Mathematik I für Ingenieure
Multiple-Choice-Aufgaben

MC 99-1
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) := \bigl(x^3-1\bigr)\sin y$, die an verschiedenen Stellen (x,y) ausgewertet werden soll. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ f ist in der Nähe von $(0,0)$ gut konditioniert.
- ◯ f ist für alle $(x,y) \in [-0.5, 0.5] \times [-1,1] \backslash \{(0,0)\}$ gut konditioniert.
- ◯ f ist in der Nähe von $(1,1)$ gut konditioniert.
- ◯ f ist für alle (x,y) mit $x<0$ und $y \neq i\,\pi,\ i \in \mathbb{Z}$ gut konditioniert.

MC 99-2
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Division zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.
- ◯ Bei einem stabilen Algorithmus ist die Abweichung im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte Fehler.
- ◯ Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.
- ◯ Die Funktion $f(x,y) := x-y$ ist gut konditioniert für alle $x<0, y>0$.

MC 99-3
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Nachiteration verbessert eine nicht exakte Lösung $\tilde{x}$ des Gleichungssystems $A\,x = b$.
- ◯ Mit der Nachiteration lassen sich die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit $\tilde{L}\,\tilde{R} \approx A$ so verbessern, dass $\|\tilde{L}\,\tilde{R} - A\|_2$ kleiner wird.
- ◯ Die Nachiteration ist nur für symmetrisch positiv definite Matrizen sinnvoll.
- ◯ Mittels Nachiteration lassen sich auch Gleichungssysteme $A\,x = b$ mit $\det(A) = 0$ eindeutig lösen.

MC 99-4
Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p>1$ gegen x^*, wenn $c>0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $|x_{k+1}-x^*| \le c|x_k - x^*|^p$ für alle $k \ge k_0$ gilt.
- ◯ Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p=1$ gegen x^*, wenn $c>1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $|x_{k+1}-x^*| \le c|x_k - x^*|$ für alle $k \ge k_0$ gilt.
- ◯ Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p>1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \to \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.
- ◯ Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$.

MC 99-5
Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \le x_0 < \ldots < x_m \le d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist eine Newton-Cotes-Formel exakt für alle Polynome vom Grade $\le n \in \mathbb{N}$, so ist diejenige Gauß-Formel, die dasselbe m verwendet, exakt für alle Polynome vom Grade $\le 2n-1$.
- ◯ Sowohl bei Gauß- als auch bei Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.
- ◯ Bei unstetigen Integranden f sind Gauß-Quadraturformeln stets genauer als Newton-Cotes-Formeln, sofern beide dasselbe m verwenden.
- ◯ Es gilt $I(f) = \frac{d-c}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}\,t)\,\mathrm{d}t$.

MC 99-6

Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ In $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$ gilt $\left|\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right| = (1 + \varepsilon)x$ mit $|\varepsilon| \leq 10^{-3}$ $\forall x \neq 0$.
- ◯ In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $\mathrm{eps} = 5 \cdot 10^{-4}$.
- ◯ In $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$ gilt $x_{\min} = 10^{-8}$.
- ◯ In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $x_{\max} = 99990000$.

MC 99-7

Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist A regulär, so existiert stets eine LR–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $PA = LR$ gilt.
- ◯ Ist A regulär, so existiert stets eine LR–Zerlegung mit Permutationsmatrix P und Diagonalmatrix D, so dass $PDA = LR$ gilt.
- ◯ Aus $PDA = LR$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind.
- ◯ Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := DA$ die Ungleichung $\kappa_B \geq \kappa_A$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $||\cdot||_\infty$-Norm.

MC 99-8

Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$.
- ◯ Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.
- ◯ Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivotisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.
- ◯ Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.
- ◯ Ist A regulär und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung, so dass $A = LDL^T$ gilt.

MC 99-9

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Gauß-Newton-Verfahren ist stets quadratisch konvergent.
- ◯ Beim Gauß-Newton-Verfahren kann es passieren, dass das linearisierte Ausgleichsproblem keine eindeutige Lösung besitzt.
- ◯ Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.
- ◯ Zum Erreichen einer festen Zielgenauigkeit benötigt das Levenberg-Marquardt-Verfahren stets weniger Iterationsschritte als das Gauß-Newton-Verfahren.

MC 99-10

Mit der stetig differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und den Iterationswerten $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, betrachten wir die Iterationsvorschrift $x^{k+1} := \Phi(x^k)$. Ferner sei E eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $x^0 \in E$ und $L \in [0, 1)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist Φ selbstabbildend und kontraktiv in E, so ist $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k$ äquivalent zu $\Phi(x^*) = x^* \in E$, egal ob E konvex ist oder nicht.
- ◯ Ist die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\Phi(E) \subset E$ sowie $||\Phi'(x)|| \leq L$ $\forall x \in E$ in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.
- ◯ Ist E konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm $||\Phi'(x)|| \leq L$ $\forall x \in E$ hinreichend für die Kontraktivität von Φ in E.
- ◯ Φ ist kontraktiv in E, wenn in einer beliebigen Norm gilt $||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq L\, ||x - y||$ $\forall x, y \in E$.

MC 99-11

Mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Nullstellenproblem $f(x^*) = 0$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' (Jacobi-Matrix) nicht.
- ◯ Falls das Newton-Verfahren für den gewählten Startwert konvergiert, konvergiert das gedämpfte Newton-Verfahren für denselben Startwert auch.
- ◯ Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$.
- ◯ Ist $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Iterationsfolge des Sekantenverfahrens mit der Dimension $n = 1$, so gilt $x^* \in [\min\{x_k, x_{k+1}\}, \max\{x_k, x_{k+1}\}]$.

MC 99-12

Es seien $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b sowie $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $\|A\,\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - \tilde{b}\|_2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\dfrac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \dfrac{\kappa_2(A)}{\sin\Theta} \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- ◯ $\dfrac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \dfrac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- ◯ $\dfrac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \tan\Theta\ \kappa_2(A) \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- ◯ Je größer der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.

MC 99-13

Es seien $m \gg n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Es soll die Lösung x^* des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ bestimmt werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Aufwand bei Lösung mit Normalgleichungen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^3$.
- ◯ Der Aufwand bei Lösung mit Householder-Transformationen beträgt etwa mn^2.
- ◯ Die Lösung mit Normalgleichungen ist stabiler als mit QR-Zerlegung.
- ◯ Die Lösung mit Normalgleichungen ist schneller als mit QR-Zerlegung.

MC 99-14

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.
- ◯ Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von
  $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$

MC 99-15

Das Integral $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion f soll mit Hilfe der Romberg-Quadratur approximiert werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Für die Romberg-Quadratur werden Trapezsummen berechnet.
- ◯ Bei der Romberg-Quadratur ist bereits die Genauigkeit (Anzahl signifikanter Ziffern) der ersten Näherungen entscheidend für die erzielbare Genauigkeit.
- ◯ Aus Ergebnissen mit unterschiedlicher Stützstellenweite werden genauere Näherungen extrapoliert.
- ◯ Die Auswertungen mit niedriger Stützstellenweite werden für spätere Auswertungen nicht mehr benötigt.