Numerische Mathematik I für Ingenieure
Multiple-Choice-Aufgaben

Klausur F09 : MC – 1
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$
- ◯ Falls A invertierbar ist, gilt $\|AA^{-1}\| = \|A\|\,\|A^{-1}\|$.
- ◯ $\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$
- ◯ $\kappa(A) = \|A\|\|A^T\|$

Klausur F09 : MC – 2
Seien $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ eine Menge von Maschinenzahlen (normalisierte Gleitpunktdarstellung) und fl : $\mathbb{R} \to \mathbb{M}$ die zugehörige Reduktionsabbildung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl ist $x_{min} = b^{-r-1}$.
- ◯ Für die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl x_{min} gilt $\mathrm{fl}(1 + x_{min}) = 1$.
- ◯ Die relative Maschinengenauigkeit ist eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$.
- ◯ fl ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Klausur F09 : MC – 3
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit relativer Kondition $\kappa_{rel}(x)$. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest, $\tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x$ ein gestörtes x_0 und $\tilde{f}(x)$ eine numerische Näherung an f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{rel}(x_0)|\Delta x|$
- ◯ Bei einem stabilen Verfahren zur Berechnung von $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$ ist $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|}$ von der gleichen Größenordnung wie $\frac{|f(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|}$.
- ◯ Der Fehler $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|}$ hängt nur von Δx ab.
- ◯ $\kappa_{rel}(x)$ beschreibt in erster Näherung den bei exakter Rechnung zu erwartenden Fehler bei gestörten Daten.

Klausur F09 : MC – 4
Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.
- ◯ Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.
- ◯ Die Ermittlung der Lösung mit Hilfe von Givens-Rotationen ist stabil.
- ◯ Das Cholesky-Verfahren ist nur mit Pivotisierung stabil.

Klausur F09 : MC – 5
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\|A\,x = b\|_2 \to \min$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ x läßt sich mit Hilfe der LR-Zerlegung von A bestimmen.
- ◯ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.
- ◯ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen ist etwa mn^2 Operationen.
- ◯ Für dünn besetzte Matrizen können Givens-Rotatioen effizienter sein als Householder-Spiegelungen.

Klausur F09 : MC – 6

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $QR = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$
- ◯ $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$
- ◯ Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.
- ◯ $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$

Klausur F09 : MC – 7

Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Bei mehrdimensionalen Problemen erfordert das Newton-Verfahren in jedem Iterationsschritt das Lösen eines linearen Gleichungssystems.
- ◯ Während beim Newtonverfahren in jedem Schritt ein neues lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, ändert sich beim vereinfachten Newtonverfahren nur die rechte Seite $-f(x^k)$.
- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren trägt seinen Namen, weil es stets ohne die Lösung eines linearen Gleichungssystems auskommt.
- ◯ Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle der quadratischen Näherung an die Funktion f im Punkt x^k.

Klausur F09 : MC – 8

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^*:

$$x_0 \in U, \qquad x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Newton-Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Die Newton-Methode ist nur lokal quadratisch konvergent, falls man die Berechnung von $\left(f'(x_k)\right)^{-1}$ vermeidet.
- ◯ Wenn $f'(x)$ in für alle $x \in U$ regulär ist und das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große k's : $||x_k - x^*|| \approx ||x_k - x_{k+1}||$.
- ◯ Die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens kann durch Verwendung orthogonaler Transformationen zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems beschleunigt werden.

Klausur F09 : MC – 9

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.
- ◯ Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.

Klausur F09 : MC – 10

Sei $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- ◯ $P(f|x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n+1} a_i\, x$ ist ein Polynom vom Grad $n + 1$ mit $a_{n+1} \neq 0$.
- ◯ Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
- ◯ $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Klausur F09 : MC – 11
Sei $P(f|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\dots,n$ mit den Stützstellen $a=x_0<\dots<x_n=b$ für $n\in\mathbb{N}$. Sei $e(x):=f(x)-P(f|x_0,\dots,x_n)$, $x\in\mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I:=[\min(a,x),\max(b,x)]$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $e(x_i)=0$, $i=0,\dots,n$.
- ◯ Für $f\in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi\in I$, so dass $e(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$.
- ◯ Es sei $[c,d]\subsetneqq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x\in[c,d]$ wie folgt abschätzen: $|e(x)|\le\max_{z\in[c,d]}|\prod_{i=0}^{n}(z-x_i)|\,\max_{z\in[c,d]}\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}$.
- ◯ Sei $f(x)=1/(1+x^2)$, $x\in[-5,5]$. Für festes $n\in\mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n}=-5+10\,j/n$, $j=0,\dots,n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-5,5]}|f(x)-P(f|x_0,\dots,x_n)|=0$.

Klausur F09 : MC – 12
$P(f|x_0,\dots,x_n)$ löse das Lagrange-Interpolationsproblem zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\dots,n$ für $n\in\mathbb{N}$ mit den Stützstellen $a=x_0<\dots<x_n=b$. Das Interpolationspolynom soll an einer festen Stelle $x\in[a,b]$ berechnet werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Aufwand für die Berechnung über die Lagrange-Darstellung ist $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.
- ◯ Der Aufwand für die Berechnung über die Newton-Darstellung ist $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.
- ◯ Der Aufwand für die Berechnung über das Neville-Aitken-Schema ist $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.
- ◯ Die Auswertung der Newton-Darstellung kann über ein Horner-artiges Schema durchgeführt werden und erfordert $\mathcal{O}(n)$ Operationen.

Klausur F09 : MC – 13
Sei $f\in C[a,b]$. Das Integral $I(f):=\int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu Stützstellen $a\le x_0<\dots<x_m\le b$ approximiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $I_m(f)=\int_a^b P(f|x_0,\dots,x_m)dx$ wobei $P(f|x_0,\dots,x_m)$ das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0<\dots<x_m$ ist.
- ◯ $I_m(q)=I(q)$ für alle $q\in\Pi_m$.
- ◯ Falls $f\in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $|I(f)-I_m(f)|\le\frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(m+1)}(x)\right|$.
- ◯ Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).
- ◯ $I_m(f)=(b-a)\sum_{j=0}^{m}c_j\,f(x_j)$ mit $c_j=\frac{1}{b-a}\int_a^b\prod_{k=0,k\ne j}^{m}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}dx$.

Klausur F09 : MC – 14
Sei $f\in C[a,b]$. Das Integral $I(f):=\int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Gauss-Formel $\tilde I_m(f):=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\,f(x_i)$ approxomiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.
- ◯ $\tilde I_m(q)=I(q)$ für alle $q\in\Pi_{2m+1}$.
- ◯ Die Gewichte ω_i sind alle positiv.
- ◯ Falls $f\in C^{2m+2}[a,b]$, dann gibt es ein c_m, so dass für den Fehler gilt: $|I(f)-\tilde I_m(f)|\le c_m\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2m+2)}(x)\right|$.

Klausur F09 : MC – 15
Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Mittels Extrapolation kann man die Genauigkeit einer Quadraturformel verbessern.
- ◯ Mittels Extrapolation kann man die Stabilität einer Quadraturformel erhöhen.
- ◯ Zur Konstruktion eines Extrapolationsschemas ist eine asymptotische Fehlerentwicklung des Diskretisierungsfehlers erforderlich.
- ◯ Mit dem Romberg-Schema erhöht sich mit jeder weiteren Spalte die Genauigkeit um 2 Potenzen in h.