Numerische Mathematik I für Ingenieure
Multiple-Choice-Aufgaben

Klausur H09 : MC – 1
Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Reflektionen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.
- ◯ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$
- ◯ $\kappa_2(A) > 0$
- ◯ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A^{-1}) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$

Klausur H09 : MC – 2
Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Rechenaufwand beim Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen beträgt jeweils $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- ◯ Skalierung/Äquilibrierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ◯ Pivotisierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ◯ Die Nachiteration verbessert die Kondition des Problems.

Klausur H09 : MC – 3
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\|A\,x - b\|_2 \to \min$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $||A||_2 = ||QA||_2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$
- ◯ $||Ax - b||_2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.
- ◯ Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^TA) \approx 2\kappa_2(A)$.
- ◯ Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^TAx^* = A^Tb$.

Klausur H09 : MC – 4
Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right|$.
- ◯ Für $|x - 1| \ll 1$ ist $f(x)$ gut konditioniert.
- ◯ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{x}\right|$.
- ◯ Für $x \to \infty$ ist $f(x)$ gut konditioniert.

Klausur H09 : MC – 5
Sei $f(x,y) = x\nabla y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\nabla \in \{+,-,\times,\div\}$ und κ_{rel} die relative Konditionszahl von f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Für die Multiplikation und die Division ist $\kappa_{rel} \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ◯ Für die Addition und die Subtraktion ist $\kappa_{rel} \gg 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ◯ Bei der Addition und der Subtraktion kann eine sehr große relative Fehlerverstärkung auftreten.
- ◯ Die relativen Rundungsfehler bei den elementaren Gleitpunktoperationen $\circledtriangledown$ sind betragsmäßig kleiner als die Maschinenengenauigkeit.

Klausur H09 : MC – 6
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a,b]$.
- ◯ Die Wahl der Stützstellen hat keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler.
- ◯ Falls $f \in C^{n+1}([a,b])$, dann hängt der Interpolationsfehler im Intervall $[a,b]$ von dem Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ und dem Maximum von $|f^{(n+1)}|$ in $[a,b]$ ab.
- ◯ Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.

Klausur H09 : MC – 7
Sei $[x_0,\ldots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ von der Funktion f zu den Stützstellen $x_0,\ldots,x_n$. Ferner sei $a := \min_{0\leq i\leq n} x_i$ und $b := \max_{0\leq i\leq n} x_i$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die dividierte Differenz hängt von der Reihenfolge der Stützstellen ab.
- ◯ Falls $f \in C^n([a,b])$, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $[x_0,\ldots,x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n!$.
- ◯ Für die Newtonsche Interpolationsformel gilt:

$$p(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \sum_{i=0}^{n}[x_0,\ldots,x_i]f \prod_{j=0}^{i}(x - x_j)$$

.

- ◯ Falls die Stützstellen paarweise verschieden sind, dann gilt: $[x_0,\ldots,x_n]f = ([x_1,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f)/(x_n - x_0)$.

Klausur H09 : MC – 8
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + 2\,y''(t) - y'(t)\,y^2(t) = \sin(t) \text{ mit } y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -1.$$

Ferner sei $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Anfangswertprobleme zu dem obigen Problem äquivalent sind.

- ◯ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(0) = (1,2,-1)^T$.
- ◯ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1,2,-1)^T$.
- ◯ $z'(t) = (z_1(t), z_2(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1,2,-1)^T$.
- ◯ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (2,-1,4)^T$.

Klausur H09 : MC − 9

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.
- ◯ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.
- ◯ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.
- ◯ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.

Klausur H09 : MC − 10

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.

Klausur H09 : MC − 11

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\Phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.
- ◯ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von Φ bestimmen.
- ◯ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von Φ bestimmen.
- ◯ Wenn $\|F(x^\star)\|_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.

Klausur H09 : MC − 12

Seien $f \in C[a, b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a, b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ eine Quadraturformel. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die absolute Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ◯ Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ◯ Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.
- ◯ Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.