Hier einige Hinweise zu den MC-Aufgaben. Die Lösungen sollten nicht auswendig gelernt werden. Man sollte verstehen bzw. kurz herleiten können, warum die entsprechenden Aussagen richtig oder falsch sind. In vielen Fällen sind das ja kurze Berechnungen oder Umformungen. Auch ist es für die nächsten Klausuren (Verständnisaufgaben) nicht ausreichend, nur diese Aufgaben zu beherrschen.
Im Folgenden beziehen sich Seitenzahlen pxy auf die Seiten der Folien für Dozenten, (siehe: http://www.igpm.rwth-aachen.de/DahmenReusken) und GB ist die Abkürzung für Gegenbeispiel.
Die Kapitelangaben habe ich unterdrückt. Ferner werden die Teilaufgaben als a), b), c) und d) angenommen.
KHB

MC 1. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Reflektionen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.
- ⊗ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$
- ⊗ $\kappa_2(A) > 0$
- ⊗ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A^{-1}) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$

a) $\frac{2}{3}n^3$ Bem.:$L - D - L^T$: $\frac{1}{6}n^3$, $\quad L - R$: $\frac{1}{3}n^3$, $\quad$ Givens : $\frac{4}{3}n^3$
b) Teile durch $\|x\| \cdot \|b\|$ und p14 oder: $\tilde{b} = A\,\tilde{x}$ und Fehlerformel (p9 Satz 3.7)
c) Allgemein: $\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \geq \|A\,A^{-1}\| = \|I\| \geq 1 > 0$
d) Da $\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| = \|A^{-1}\|\,\|A\| = \kappa(A^{-1})$ ist das identisch zu b)

MC 2. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Der Rechenaufwand beim Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen beträgt jeweils $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- ○ Skalierung/Äquilibrierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ⊗ Pivotisierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ○ Die Nachiteration verbessert die Kondition des Problems.

a) $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n^2 + ? \cdot n$, p22
b) Skalierung beeinflusst die Kondition der Matrix (pp16)
c) Übung, p45
d) Das Ziel der Nachiteration ist es, die/eine Näherung der Lösung iterativ zu verbessern. (p50)

MC 3. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\|A\,x - b\|_2 \to \min$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $||A||_2 = ||QA||_2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$
- ⊗ $||Ax - b||_2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.
- ○ Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^TA) \approx 2\kappa_2(A)$.
- ○ Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^TAx^* = A^Tb$.

a) $\|Q\,A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((Q\,A)^T(Q\,A))} = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \|A\|_2$ oder Übung, p68, ...
b) Sonst wäre es nicht der minimale Abstand. p7
c) Aus $\kappa_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$ folgt unmittelbar $\kappa_2(A^TA) = (\kappa_2(A))^2$ (oder p13)
d) Nur wenn A vollen Rang hat, d.h. die Spalten von A l.u. sind

MC 4. Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right|$.
- ○ Für $|x - 1| \ll 1$ ist $f(x)$ gut konditioniert.
- ○ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{x}\right|$.
- ⊗ Für $x \to \infty$ ist $f(x)$ gut konditioniert.

a), c) $f'(x) = \frac{1}{x} \to \kappa_{rel}(x) = \left|\frac{\frac{1}{x}\, x}{\ln x}\right|$
b) Für $(x \to 1\pm) \to (\kappa_{rel}(x) \to \pm\infty)$
d) Für $x > e$ ist $\kappa_{rel}(x) < 1$

MC 5. Sei $f(x, y) = x \bigtriangledown y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\bigtriangledown \in \{+, -, \times, \mathrm{div}\}$ und κ_{rel} die relative Konditionszahl von f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Für die Multiplikation und die Division ist $\kappa_{rel} \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ○ Für die Addition und die Subtraktion ist $\kappa_{rel} \gg 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ⊗ Bei der Addition und der Subtraktion kann eine sehr große relative Fehlerverstärkung auftreten.
- ○ Die relativen Rundungsfehler bei den elementaren Gleitpunktoperationen $\bigcirc\!\!\!\!\bigtriangledown$ sind betragsmäßig kleiner als die Maschinengenauigkeit.

a) Nachrechnen oder: "*"Vorlesung (p21), "/"Übung A2.9
b) GB: 1+1 oder p22
c) Auslöschung und/oder p22
d) Gilt nur falls die Eingangsdaten Maschinenzahlen sind, pp42, insbesondere p44 und p46

MC 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.
- ○ Die Wahl der Stützstellen hat keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler.
- ⊗ Falls $f \in C^{n+1}([a, b])$, dann hängt der Interpolationsfehler im Intervall $[a, b]$ von dem Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ und dem Maximum von $|f^{(n+1)}(x)|$ in $[a, b]$ ab.
- ○ Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.

a), b), d) GB von Runge, pp19 insbesondere p20 und p21
c) Fehlerformel, Übung oder Satz 8.22 p17

MC 7. Sei $[x_0,\ldots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ von der Funktion f zu den Stützstellen $x_0,\ldots,x_n$. Ferner sei $a := \min_{0\le i\le n} x_i$ und $b := \max_{0\le i\le n} x_i$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Die dividierte Differenz hängt von der Reihenfolge der Stützstellen ab.

⊗ Falls $f \in C^n([a,b])$, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $[x_0,\ldots,x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n!$.

○ Für die Newtonsche Interpolationsformel gilt:

$$p(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \sum_{i=0}^{n}[x_0,\ldots,x_i]f\prod_{j=0}^{i}(x-x_j)\ .$$

⊗ Falls die Stützstellen paarweise verschieden sind, dann gilt:
$[x_0,\ldots,x_n]f = ([x_1,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f)/(x_n - x_0)$.

a) Übung, Satz 8.21 p16
b) Übung (A7.2), Satz 8.21 p16
c) Widerspricht dem Polynomgrad ($n \leftrightarrow n+1$), das Produkt geht nur bis $i-1$
d) Das ist die Rekursionsformel (Übung), Lemma 8.16 p14

MC 8. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + 2\,y''(t) - y'(t)\,y^2(t) = \sin(t) \text{ mit } y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -1.$$

Ferner sei $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Anfangswertprobleme zu dem obigen Problem äquivalent sind.

○ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(0) = (1,2,-1)^T$.

⊗ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1,2,-1)^T$.

○ $z'(t) = (z_1(t), z_2(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1,2,-1)^T$.

○ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (2,-1,4)^T$.

Eigentlich HöMa, Ausrechnen oder a) falsches t_0: $t_0 = 1$, nicht 0, d) falsche Startwerte, c) Es wäre dann $z_1' = z_1$, bleibt nur b)

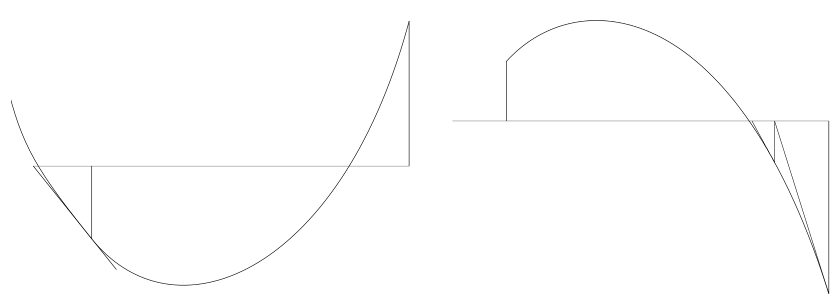
MC 9. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

⊗ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.

○ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \ge a$.

⊗ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.

○ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.



a), b), c) Siehe Skizze und a) wenn weitere NSts existierten, müsste f Wendepunkte haben ($f''(x) \neq 0$)
d) GB lineare Funktion $f(0) = 100$, $f(1) = -1$, Sekantenverfahren 1 Schritt, Bisektion mehr Schritte

MC 10. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das vereinfachte Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ⊗ Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.

a) $x_{k+1} = x_k - (f'(x_0))^{-1} f(x_k) \rightarrow \mathbf{\Phi}(x) := x - (f'(x_0))^{-1} f(x)$
b) Bisektion enthält "**if**" Abfrage
c) $x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k) \rightarrow \mathbf{\Phi}(x) := x - (f'(x))^{-1} f(x)$
d) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$ hängt von zwei vorherigen Iterierten ab.

MC 11. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.
- ◯ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von ϕ bestimmen.
- ◯ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von ϕ bestimmen.
- ⊗ Wenn $\|F(x^\star)\|_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.

a) Schreibt man das Update als Lösung der Normalgleichungen, so erhält man die Fixpunktgleichung
$\mathbf{\Phi}(x) := x - \left(F'(x)^T F'(x)\right)^{-1} F'(x)^T F(x) \quad \left(= x - \left(F'(x)^T F'(x)\right)^{-1} \nabla\phi(x)\right)$ (siehe auch p6)
b) p11 unten
c) p12 unten
c) p12 oben, dann ist nämlich $\rho(K)\|F(x^\star)\|_2 = 0$, d.h. $\mathbf{\Phi}(x^\star) = 0$ oder im Buch die Eigenschaften auf Seite 220

MC 12. Seien $f \in C[a, b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a, b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ eine Quadraturformel. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die absolute Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ◯ Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ⊗ Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.
- ◯ Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.

a), b) p1: a) erste Abschätzung, b) κ_{rel} falls $I \approx 0$ und nicht gleichzeitig $f \approx 0$
c) Das ist im Prinzip die Definition (Zielvorgabe auf p14)
d) z.B. bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung ergeben sich Gewichte mit wechselnden Vorzeichen (positive Gewichte ist ein Markenzeichen der Gauß-Quadratur