Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Aussagen. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen alle Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Ist die Aufgabe komplett richtig beantwortet, so gibt es 2 Punkte, ansonsten 0 Punkte. Es können 0 bis 4 Antworten richtig sein!

Beantworten Sie ALLE Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Beim vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme muss im gesamten Verfahren nur eine LR-Zerlegung berechnet werden.	
2.	Die Iterierten des eindimensionalen Newton-Verfahrens bilden, wenn das Verfahren konvergiert, stets eine monotone Folge.	
3.	Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und x^* eine mehrfache Nullstelle von f. Dann konvergiert das Newton-Verfahren lokal quadratisch gegen x^*.	
4.	Das Newton-Verfahren für Systeme kann man als eine Fixpunktiteration auffassen.	

VF-2:		
1.	Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Iterationsvorschrift und x^* ein Fixpunkt, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$. Dann gilt: $\lvert\Phi'(x^*)\rvert < 1$.	
2.	Es sei $\Phi(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Außerdem gilt $\Phi(x^*) = x^*$ für ein $x^* \in [a, b]$ mit $x^* \neq 0$. Dann konvergiert das Newtonverfahren, angewendet auf $\Phi(x)$ immer für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$ gegen x^*.	
3.	Die Konvergenzordnung des Regula-Falsi-Verfahrens ist ungefähr 1.6.	
4.	Das vereinfachte Newton-Verfahren ist global konvergent mit Konvergenzordnung 1.	

VF-3: Gegeben seien die Daten $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\dots$, $f(x_n)$ mit $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedenen und $n \geq 3$, $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ sowie $x \in \mathbb{R}$.		
1.	Das aus der Vorlesung bekannte Lagrange-Interpolationsproblem zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ ist stets eindeutig lösbar.	
2.	Für beliebiges $f \in C^n[a, b]$, gilt: $$\max_{x\in[a,b]} \lvert f(x) - P(f\lvert x_0, \dots, x_n)(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \left\lvert \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) \right\rvert \max_{x\in[a,b]} \frac{\lvert f^{(n)}(x)\rvert}{n!}$$	
3.	Durch Erhöhung der Stützstellenzahl und der damit verbundenen Erhöhung des Polynomgrades erhält man beliebig gute Approximationen für die zu interpolierende Funktion (bezüglich der Norm $\lvert\lvert.\rvert\rvert_\infty$).	
4.	Für $g(x) := 2x^n - \pi x^2$ gilt: $g(x) = P(g\lvert x_0, x_2, x_n)(x)$.	

VF-4: Es seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.		
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \dots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, n$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	

VF-5: Es seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ eine Quadraturformel.		
1.	Die Gewichte der Gauß-Quadraturformeln sind immer größer Null.	
2.	Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.	
3.	Falls die Quadraturformel $Q(f)$ exakt ist vom Grad $n+1$, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	
4.	Die Stützstellen der Gauß-Quadraturformeln sind nicht unbedingt äquidistant.	

VF-6: Es seien $m \geq 0$, $f \in C^{2m+2}[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$.		
1.	Es seien $Q_0(f)$ die berechnete Integralapproximation mittels der Mittelpunktsregel und $Q_1(f)$ die Approximation mittels der Trapezregel. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C^2[a,b]$: $$\lvert Q_0(f) - I(f)\rvert \leq \lvert Q_1(f) - I(f)\rvert.$$	
2.	Für die Newton-Cotes-Formeln $I_m(f)$ gilt: $$\lvert I(f) - I_m(f)\rvert \leq \frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)!}\lvert\lvert f^{(m+1)}\rvert\rvert_\infty$$	
3.	Es seien $G_m(f)$ die berechnete Integralapproximation mit einer Gauß-Quadratur und $I_m(f)$ die Approximation mittels einer Newton-Cotes-Formel. Dann gilt für alle $f \in C^{2m+2}[a,b]$: $$\lvert G_m(f) - I(f)\rvert < \lvert I_m(f) - I(f)\rvert.$$	
4.	Durch Extrapolation kann der Quadraturfehler verringert werden.	

VF-7: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x\, e^{4\, y^2}$. Dann gilt: (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen.)		
1.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = 1 + 8\, y^2$.	
2.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \max(1, 8\, y^2)$.	
3.	Das Problem ist schlecht konditioniert für $\lvert x\rvert \to \infty$.	
4.	Das Problem ist gut konditioniert für $x^2 + y^2 \leq 0.1$.	

VF-8: Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = L\, R$.	
2.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt $\frac{1}{6}\, n^3$ Operationen.	
3.	Die Inverse von A kann mittels LR-Zerlegung mit Pivotisierung in $\frac{4}{3}\, n^3$ Operationen berechnet werden.	
4.	Falls A symmetrisch positiv definit ist, existiert immer eine LDL^T-Zerlegung von A.	

VF-9: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $A\,x = b$:		
1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann mit dem Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung stabil berechnet werden.	
4.	Zeilenäquilibrierung verbessert immer die Kondition der Matrix A bezüglich der 2-Norm.	

VF-10: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Least-Squares-Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems. Dann gilt:		
1.	x^* ist Lösung von $A^T A x^* = A^T\,b$.	
2.	$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 = \|Ax^* - b\|_1$.	
3.	x^* ist die eindeutige Lösung des linearen Ausgleichsproblems.	
4.	Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über die Normalgleichungen werden die entstehenden Rundungsfehler mit $\kappa_2(A^T A)$ verstärkt.	

VF-11: Es seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\|F(x)\|_2 \to \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T\,F(x)$. Dann gilt:		
1.	$\phi(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$.	
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\mathbf{\Phi}(x) := x - \left(F'(x)^T F'(x)\right)^{-1} \nabla\phi(x)$.	
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	

VF-12: Es sei $y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$, $t > t_0$, eine explizit gegebene gewöhnliche Differentialgleichung m-ter Ordnung mit den Anfangsbedingungen $y^{(i)}(t_0) = y_i$, $i = 0, \ldots, m-1$. Dann gilt:		
1.	Falls $m = 1$ ist, dann löst $y(t)$ das Anfangswertproblem genau dann, wenn $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$.	
2.	Jede gewöhnliche Differentialgleichnung höherer Ordnung in obiger Form kann als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden.	
3.	Das obige Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung.	
4.	Sei $z_1(t), \ldots, z_m(t)$ Lösung des Anfangswertproblems $z_1'(t) = z_2(t), \ldots, z_{m-1}'(t) = z_m(t)$, $z_m'(t) = f(t, z_1(t), \ldots, z_{m-1}(t))$ mit $z_1(t_0) = y_0, \ldots, z_m(t_0) = y_{m-1}$. Dann gilt $z_1(t) = y(t)$.	