Lösung linearer Gleichungssysteme

gesucht: Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -5 \\ -6x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 13 \\ 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 2x_4 &= -8 \end{aligned}$$

nie wieder so umständlich schreiben!

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -7 & -2 \\ 4 & 4 & 5 & -5 \\ 8 & 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

A regulär: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n$

(max. Anzahl lin. unabh. Spalten bzw. Zeilen)

$x = ?$

1.) Cramersche Regel: $x = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$ mit $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$ (Spalten von A), $A_k := (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{k-1}\ \vec{b}\ \vec{a}_{k+1} \dots \vec{a}_n)$ ($\vec{b}$ anstatt $\vec{a}_k$)

Aufwand: $n!$ pro Determinante $\Rightarrow$ $(n+1)!$ für alle $n+1$ Determinanten

n	$T_{3GHz-PC}$ (6 Gflop/s)	$T_{BlueGene/L}$ (135 Tflop/s)
12	1 s	0.5 ms
15	1 h	0.15 s
17	12 d	47 s
19	13 a	0.2 d
21	6000 a	100 d

Bem: $n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right)$

$\Rightarrow$ Cramer schlägt Rechner k.o. ab $n = 15 \dots 20$

$\Rightarrow$ Cramersche Regel völlig ungeeignet für die Praxis!

2.) Gauß-Elimination: Erzeuge rechte obere Dreiecksmatrix, dann Rückwärtseinsetzen

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & -1 & 3 & 2 & -5 & =: \mathrm{I} \\ -6 & -3 & -7 & -2 & 5 & \\ 4 & 4 & 5 & -5 & 13 & \\ 8 & 2 & 12 & 2 & -8 & \end{array}
\quad
\begin{array}{l} \\ -(-3)\cdot\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -4\cdot\mathrm{I} \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc|cl} 2 & -1 & 3 & 2 & -5 & \\ 0 & -6 & 2 & 4 & -10 & =: \mathrm{II} \\ 0 & 6 & -1 & -9 & 23 & \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 12 & \end{array}$$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, $l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$, $l_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$

$$\begin{array}{l} \\ \\ -(-1)\cdot\mathrm{II} \\ -(-1)\cdot\mathrm{II} \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc|cl} 2 & -1 & 3 & 2 & -5 & \\ 0 & -6 & 2 & 4 & -10 & \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 13 & =: \mathrm{III} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & \end{array}$$

l_{32}, $l_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}}$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ -2\cdot\mathrm{III} \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -24 \end{array}$$

$l_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}}$

Aufwand: $(n-1)(n+1) + (n-2)\cdot n + \dots + 1\cdot 3 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$ Multiplikationen/Divisionen!

(sehr viel besser als Cramer!)

Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & -1 & 3 & 2 & -5 \\
0 & -6 & 2 & 4 & -10 \\
0 & 0 & 1 & -5 & 13 \\
0 & 0 & 0 & 8 & -24
\end{array}$$

$\Rightarrow x_4 = \frac{-24}{8} = -3$

$\Rightarrow x_3 = \frac{13-(-5x_4)}{1} = -2$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-10-(4x_4+2x_3)}{-6} = -1$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-5-(2x_4+3x_3-x_2)}{2} = 3$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufwand: $1+2+\ldots+n = n\,\frac{n+1}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

Gesamtaufwand: $\underbrace{\underbrace{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}}_{\text{Gauß}} + \underbrace{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}_{\text{Rückwärtseinsetzen}}}_{} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \overset{n\gg 1}{\approx} \frac{n^3}{3}$

d.h. Aufwand $\frac{n^2}{2}$ für Rückwärtseinsetzen ist vernachlässigbar für $n \gg 1$

Nun: andere rechte Seite, aber gleiche Matrix: $Ax = b$, $b = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 16 \\ -14 \end{pmatrix}$

$x = ?$

nochmal Gauß-Elimination?

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 3 & 2 & -11 \\
-6 & -3 & -7 & -2 & 3 \\
4 & 4 & 5 & -5 & 16 \\
8 & 2 & 12 & 2 & -14
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
=: \mathrm{I} \\
-(-3)\cdot\mathrm{I} \\
-2\cdot\mathrm{I} \\
-4\cdot\mathrm{I}
\end{array}
\longrightarrow \ldots$$

das wäre ja nochmal dieselbe Rechnung, bis auf die rechte Seite!

Nein!

Stattdessen: „Merke" die schon vorhandene Zerlegung $A = LR$

mit $L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(Vorsicht mit Vorzeichen: $l_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$, d.h. l_{ij}-faches der j-ten Zeile wird von der i-ten Zeile subtrahiert, um $0 = a_{ij} - l_{ij}a_{jj} = r_{ij}$, $i > j$, zu erzeugen)

aber wie? $b = Ax = L\underbrace{Rx}_{=:y}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{I}) & b = Ly \Rightarrow y = ? \\ \mathrm{II}) & y = Rx \Rightarrow x = ? \end{array}}$ (Vorwärtseinsetzen) (Rückwärtseinsetzen)

hier: I) $Ly = b$:

Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\
-3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & -1 & 1 & 0 & 16 \\
4 & -1 & 2 & 1 & -14
\end{array}$$

$\Rightarrow y_1 = -11$

$\Rightarrow y_2 = 3 - (-3y_1) = -30$

$\Rightarrow y_3 = 16 - (2y_1 - 1y_2) = 8$

$\Rightarrow y_4 = -14 - (4y_1 - 1y_2 + 2y_3) = -16$

II) $Rx = y$:

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 3 & 2 & -11 \\
0 & -6 & 2 & 4 & -30 \\
0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 8 & -16
\end{array}$$

$\Rightarrow x_4 = -2$

$\Rightarrow x_3 = \frac{8-(-5x_4)}{1} = -2$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-30-(4x_4+2x_3)}{-6} = 3$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-11-(2x_4+3x_3-1x_2)}{2} = 1$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufwand für Lösen bei neuer rechter Seite: $2\cdot\frac{n^2}{2} = \underline{\underline{n^2}} \overset{n\gg 1}{\ll} \frac{n^3}{3}$ hätte man bei nochmaliger unnötiger Gauß-Elimination

(exakt: $\underbrace{0+1+\ldots+n-1}_{\text{Vorwärtseinsetzen}} + \underbrace{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}_{\text{Rückwärtseinsetzen}} = n\frac{n-1}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} = \underline{\underline{n^2}}$

<u>Also: LR-Zerlegung</u> $=$ „Gauß-Elimination ohne rechte Seite"

kein Zusatzaufwand (nur die l_{ij} behalten), aber sehr effizient bei mehreren rechten Seiten (die am Anfang noch nicht alle bekannt sind, z. B. (vereinfachtes) Newton-Verfahren)

Aufwand reine Zerlegung: $(n-1)\cdot n+(n-2)(n-1)+\ldots+1\cdot 2 = \frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}$ nur minimal weniger als Gauß (inkl. rechte Seite)

<u>Bem.:</u> Wenn doch alle „rechten Seiten" von Anfang an bekannt, kann man sie auch direkt alle im Gauß-Algorithmus mittransformieren.

<u>Beispiel: Berechnung der Inversen</u> A^{-1} zu $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}$

$AX = A\underbrace{A^{-1}}_{=:X} = E$ (Einheitsmatrix)

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\1&-2&2&0&1&0\\-2&1&2&0&0&1\end{array}\right.\begin{array}{l}=:\mathrm{I}\\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow[-(-1)\cdot\mathrm{I}]{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&2&1&1&0&1\end{array}\begin{array}{l}\\=:\mathrm{II}\\ \\ \end{array}\xrightarrow{-(-\frac{4}{5})\cdot\mathrm{II}}\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&3&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&1\end{array}\begin{array}{l}=:\mathrm{I}\\=:\mathrm{II}\\=:\mathrm{III}\end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{l}\mathrm{I}-\frac{1}{-\frac{5}{2}}\cdot\mathrm{II}-\frac{-1}{3}\cdot\mathrm{III}\\ \mathrm{II}-\frac{\frac{5}{2}}{3}\cdot\mathrm{III}\\ \mathrm{III}\text{ lassen}\end{array}\longrightarrow\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&\frac{4}{5}&\frac{6}{15}&0\\0&-\frac{5}{2}&0&-1&\frac{1}{3}&-\frac{5}{6}\\0&0&3&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&1\end{array}\begin{array}{l}\\=:\mathrm{II}'\\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{2}{15}&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}&\frac{1}{3}\end{array}}_{\text{identisch mit Rückwärtseinsetzen!}} = A^{-1}$$

Aufwandsvergleich bei m rechten Seiten:

1.) Gauß (direkt mit allen rechten Seiten), dann Rückwärtseinsetzen:

$$m\frac{n^2+n}{2} + \underbrace{(n-1)(m+n)+(n-2)(m+n-1)+\ldots+1\cdot(m+2)}_{m\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^3-n}{3}} = mn^2+\frac{n^3-n}{3} \underset{=}{\overset{m=n}{=}} \frac{4n^3-n}{3}$$

m rechte Seite — Rückwärtseinsetzen pro rechter Seite — Gauß mit m rechten Seiten

exakt gleicher Aufwand!

2.) LR, dann m-mal Vor-/Rückwärtseinsetzen:

$$\frac{n^3-n}{3} + mn^2 \quad \overset{m=n}{=} \quad \frac{4n^3-n}{3}$$

LR — m rechte Seiten — Vor-/Rückwärtseinsetzen pro rechter Seite

$\Rightarrow$ egal, ob rechte Seiten direkt mittransformiert oder erst LR und dann Vorwärtseinsetzen!

<u>Berechnung der Determinanten:</u>

$$\det(A) = \det(LR) = \underbrace{\det(L)}_{1}\cdot\det(R) = \det R = \prod_{k=1}^{n} r_{kk} \quad \text{(Produkt der Hauptdiagonalelemente)}$$

hier: $\det A = 2\cdot(-6)\cdot 1\cdot 8 = -96$

5. Großübung Numerik I für Maschinenbauer (24.05.04)

Pfingstwoche (01.-04.06.04: keine Übungen, keine Vorlesung!)

Gestörtes lineares Gleichungssystem: (warum $r_x \le \frac{\cdots}{1-h}$ mit $h := \varkappa(A) r_A \overset{!}{<} 1$?)

$$b + \Delta b = (A + \Delta A)(x + \Delta x) = Ax + A\Delta x + \Delta A\, x + \Delta A\, \Delta x \overset{Ax=b}{=} b + A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x$$

$$\Leftrightarrow A\Delta x = -\Delta A x - \Delta A \Delta x + \Delta b$$

$$\overset{A \text{ regulär}}{\Longrightarrow} \Delta x = A^{-1}(-\Delta A x - \Delta A \Delta x + \Delta b)$$

$$\overset{\text{„Verträglichkeit"}}{\Longrightarrow} \|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|\,\|x\| + \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|\,\|\Delta x\| + \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|)\,\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\,(\|\Delta A\|\,\|x\| + \|\Delta b\|)$$

$$\overset{\boxed{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| > 0}}{\Longrightarrow} \|\Delta x\| \le \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|\,\|x\| + \|\Delta b\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|} \overset{\substack{x = A^{-1}b \\ \|x\| \le \|A^{-1}\|\,\|b\|}}{\le} \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|\,\|A^{-1}\|\,\|b\| + \|\Delta b\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$$

$$\overset{\substack{\|x\| \ne 0 \\ \|b\| \ne 0}}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}_{=: r_x} \le \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\| + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\frac{\|b\|}{\|x\|}}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|} \overset{\substack{b = Ax \\ \|b\| \le \|A\|\,\|x\|}}{\le} \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{\varkappa(A)} \frac{\overbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}^{r_A :=} + \overbrace{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}^{=: r_b}}{1 - \underbrace{\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}_{\varkappa(A) r_A =: h}} = \varkappa(A) \frac{r_A + r_b}{1-h}$$

$\boxed{h < 1}$

Skalierung: (Verbesserung der Kondition)

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2\cdot 10^6 & 3\cdot 10^6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3\cdot 10^6 - 8\cdot 10^6} \begin{pmatrix} 3\cdot 10^6 & -4 \\ -2\cdot 10^6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 8\cdot 10^{-7} \\ 0.4 & -2\cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = 5\cdot 10^6$ $\qquad \|A^{-1}\|_\infty = 0.600\ldots \Rightarrow \varkappa_\infty(A) = 3\cdot 10^6$ schlecht!

Wie kann man $Ax = b$ lösen (d.h. x berechnen) ohne diese extreme Fehlerverstärkung von $\varkappa = 3\cdot 10^6$?

Idee: $Ax = b \Rightarrow \underbrace{D_z A}_{=:\tilde{A}} x = \underbrace{D_z b}_{=:\tilde{b}}$ mit D_z: Diagonalmatrix

Wie D_z wählen?

Nochmal Idee: Wähle D_z so, dass die Betragssummen aller Zeilen gleich sind, z.B. gleich 1:

$$d_i := \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)^{-1} \qquad \text{(Beträge nicht vergessen!)} \qquad (*)$$

Hier: $d_1 = \frac{1}{|1|+|4|} = 0.2$, $d_2 = \frac{1}{|2\cdot 10^6| + |3\cdot 10^6|} = 2\cdot 10^{-7} \Rightarrow D_z = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 2\cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$

$\tilde{A} = D_z A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^{-1} = \frac{1}{0.12 - 0.32} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\|\tilde{A}\|_\infty = 1$ (so wurde ja D_z gewählt!), $\|\tilde{A}^{-1}\|_\infty = 7 \Rightarrow \varkappa_\infty(\tilde{A}) = 7$

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung verbessert $\varkappa_\infty$: $3\cdot 10^6 \to 7$

Allgemein: $\underline{\varkappa_\infty(D_z A) \le \varkappa_\infty(DA)}$ für jede beliebige reguläre Diagonalmatrix D

d.h. bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ - Norm ist (*) die bestmögliche Wahl für eine Diagonalmatrix D_z zur Konditionsverbesserung.

Achtung: Vor dem Lösen nicht vergessen, die rechte Seite mitzutransformieren: $(Ax=b \Rightarrow \tilde{A}x = D_z b = \tilde{b})$

z.B. $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{b} = D_z b = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 4\cdot 10^{-7} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -0.2 \\ 4\cdot 10^{-7} \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0.2 & 0.8 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -0.2 \\ 0.400\ldots \end{matrix}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.600\ldots \\ -0.400\ldots \end{pmatrix}$

Pivotisierung: (Verbesserung der Stabilität)

Gauß-Algorithmus: Erzeuge rechte obere Dreiecksmatrix: Subtrahiere von Zeile $i > j$ das Vielfache $\underbrace{\frac{a_{ij}}{a_{jj}}}_{=: l_{ij}}$ der Zeile j

Was tun, wenn $a_{jj} \approx 0$ (Auslöschung droht!)?

Beispiel: $\left.\begin{matrix} 10^{-6} & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 10^{-6} & 1 \\ 0 & \underbrace{3 - \frac{2}{10^{-6}}}_{-1.9999997\cdot 10^6} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ \underbrace{5 - \frac{2}{10^{-6}}}_{-1.9999995\cdot 10^6} \end{matrix} \xrightarrow{m \le 6 \text{ Stellen}} x_2 = 1 \Big\} \Rightarrow x_1 = 0$ falsch!

$\varkappa_1(A) = 10,\ \varkappa_2(A) = 6.85\ldots$

exakte Lösung: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Gauß-Algorithmus hier instabil!

Idee: Vor dem Eliminationsschritt Zeilen vertauschen:

$\left.\begin{matrix} 2 & 3 \\ 10^{-6} & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & \underbrace{1 - \frac{10^{-6}}{2}\cdot 3}_{0.9999985} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 \\ \underbrace{1 - \frac{10^{-6}}{2}\cdot 5}_{0.9999975} \end{matrix} \xrightarrow{m \le 5 \text{ Stellen}} x_2 = 1 \Big\} x_1 = 1$ ✓

Allgemein: Tausche mit derjenigen Zeile, die in der aktuellen Spalte das betragsgrößte Element hat. (Spaltenpivotisierung!)

Bem.:
- Pivotisierung nur sinnvoll, wenn vorher skaliert wurde.
- Statt $LR = A$ gilt dann $LR = PDA$ $(PDAx = PDb)$ mit Permutationsmatrix P.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 5 & -6 & -2\\ 7 & -8 & 9 & 3\end{array}\right)\begin{matrix}\cdot\frac{1}{6}\\ \cdot\frac{1}{15}\\ \cdot\frac{1}{24}\end{matrix} \xrightarrow{\text{Skalierung}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.1\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.5 & 0.1\overline{6}\\ -0.2\overline{6} & 0.\overline{3} & -0.4 & -0.1\overline{3}\\ 0.291\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.375 & 0.125\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1\Leftrightarrow 3]{\text{Pivotisierung}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.291\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.375 & 0.125\\ -0.2\overline{6} & 0.\overline{3} & -0.4 & -0.1\overline{3}\\ 0.1\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.5 & 0.1\overline{6}\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß-Schritt}} \left(\begin{array}{c|cc|c} 0.291\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.375 & 0.125\\ \hline -0.91429 & 0.02857 & -0.05714 & -0.01905\\ 0.57143 & -0.14286 & 0.28571 & 0.09524\end{array}\right)$$

Bem: L mittauschen!

$$\xrightarrow[2\Leftrightarrow 3]{\text{Pivotisierung}} \left(\begin{array}{c|cc|c} 0.291\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.375 & 0.125\\ \hline 0.57143 & -0.14286 & 0.28571 & 0.09524\\ -0.91429 & 0.02857 & -0.05714 & -0.01905\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß-Schritt}} \left(\begin{array}{cc|c|c} 0.291\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.375 & 0.125\\ \hline 0.57143 & -0.14286 & 0.28571 & 0.09524\\ -0.91429 & -0.19999 & -2\cdot 10^{-6} & -3.3\cdot 10^{-6}\end{array}\right)$$

I) Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 1.6667$, $x_2 = 2.6666$, $x_1 = 1.3332$ (exakt: $x = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{8}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$)

II) oder: (bei mehreren rechten Seiten schneller)

$$L\underbrace{Rx}_{=:y} = PDAx = PDb \Rightarrow \text{Algorithmus:}$$

i) Löse $Ly = PDb \xRightarrow{\text{Vorwärtseinsetzen}} y$	für alle gegebenen rechten Seiten b
ii) Löse $Rx = y \xRightarrow{\text{Rückwärtseinsetzen}} x$	

hier: $D = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{15} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{24}\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, denn: $\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \xrightarrow{1\Leftrightarrow 3} \begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix} \xrightarrow{2\Leftrightarrow 3} \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}$

i) $Db = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -\frac{2}{15}\\ \frac{1}{8}\end{pmatrix}$, $PDb = \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{15}\end{pmatrix} = Ly = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.57143 & 1 & 0\\ -0.91429 & -0.19999 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ 0.09524\\ -3.3\cdot 10^{-6}\end{pmatrix}$

ii) $y = \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ 0.09524\\ -3.3\cdot 10^{-6}\end{pmatrix} = Rx = \begin{pmatrix}0.291\overline{6} & -0.\overline{3} & 0.375\\ 0 & -0.14286 & 0.28571\\ 0 & 0 & -2\cdot 10^{-6}\end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{8}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$

Bem.:
- Bei der Implementierung D nicht als Matrix, sondern Vektor abspeichern
- " " " P " " ", " " ":

  hier: $P \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ „in welcher Spalte steht jeweils die 1?"
- Kondition $\longleftarrow$ Skalierung

  Stabilität $\longleftarrow$ Pivotisierung

Pivotisierung:

grundlegendes Beispiel: $(|\varepsilon| \ll 1)$

$$\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \end{array}$$

a) Gauß: $\left(l_{21} = \frac{1}{\varepsilon} \gg 1\right)$

$$\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & b_1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & b_2 - \frac{b_1}{\varepsilon} \end{array} \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - \frac{b_1}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - x_2}{\varepsilon} = \frac{b_1 - \overbrace{\frac{b_2 - \frac{b_1}{\varepsilon}}{1 - \frac{1}{\varepsilon}}}^{\approx b_1}}{\varepsilon}$$

Auslöschung!

Rundungsfehler beim Rückwärtseinsetzen mit $\frac{1}{\varepsilon}$ verstärkt

b) **Idee:** Erst Zeilen vertauschen, dann Gauß:

$$\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ \varepsilon & 1 & b_1 \end{array} \xrightarrow[(l_{21} = \varepsilon \ll 1)]{} \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1-\varepsilon & b_1 - \varepsilon b_2 \end{array} \Rightarrow x_2 = \frac{b_1 - \varepsilon b_2}{1-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_2 - x_2}{1} = b_2 - \overbrace{\frac{b_1 - \varepsilon b_2}{1-\varepsilon}}^{\approx b_1}$$

keine Auslöschung!

keine Fehlerverstärkung beim Rückwärtseinsetzen!

Allgemein: Tausche mit derjenigen Zeile, die in der aktuellen Spalte das betrags<u>größte</u> Element hat (<u>Spaltenpivotisierung</u>), um Fehlerverstärkung beim Rückwärtseinsetzen zu vermeiden.

Bem.: Dadurch funktioniert Gauß-Elimination auch, wenn A eine Null auf der Hauptdiagonale hat (bisher sonst crash bei $l_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{jj} = 0}$)

Beweis von $\varkappa_\infty(D_z A) \leq \varkappa_\infty(DA)$ $\forall$ regulären Diagonalmatrizen D:

$$C := \frac{D}{\|DA\|_\infty} \Rightarrow 1 = \|CA\|_\infty = \max_{k=1\dots n} |c_k| \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \geq |c_k| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|}_{=: \frac{1}{d_{0,k}}} = \frac{|c_k|}{d_{0,k}}$$

(allg. $\varkappa(aM) = \|aM\| \|a^{-1}M^{-1}\| = \|M\| \|M^{-1}\| = \varkappa(M)$)

$$\varkappa_\infty(DA) = \varkappa_\infty(CA) = \underbrace{\|CA\|_\infty}_{=1} \|A^{-1}C^{-1}\|_\infty$$

$$= \|A^{-1}C^{-1}\|_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a^{-1}_{ik}|}{|c_k|} \geq \max_{i=1\dots n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a^{-1}_{ik}|}{|d_{0,k}|} = \|A^{-1}D_z^{-1}\|_\infty$$

$$= \underbrace{\|D_z A\|_\infty}_{1} \|A^{-1}D_z^{-1}\|_\infty = \varkappa_\infty(D_z A)$$