Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 743 & -235 \\ 5 & -2.99 & 2.01 \\ 4 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skalieren Sie A.

b) Berechnen Sie die LR–Zerlegung mit Pivotisierung zu der skalierten Matrix aus a).

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ mittels der in a) und b) gewonnen Resultate, d.h. über LR–Zerlegung mit Skalierung und Pivotisierung.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Die Lösung des Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Gaußelimination und Pivotisierung in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik ist $x_G = (0.909, -1.78, -5.52)^T$. Warum ist dieses Ergebnis mit einem so großen Fehler behaftet? **Hinweis:** Die 1- und die ∞-Norm von A^{-1} sind in der Größenordnung 3.5.

Teil a) Die Zeilensummen der Beträge von A als Skalierungsvektor $s = (100, 10, 5)^T$. Und somit $A \to A_s = diag(1/s[1], 1/s[2], 1/s[3]) \cdot A$

$$A_s = \begin{pmatrix} 0.022 & 0.743 & -0.235 \\ 0.5 & -0.299 & 0.201 \\ 0.8 & -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Teil b) (Die Zeilen werden "schreibtechnisch vertauscht" und nicht nur markiert.)
Pivotzeile 3: Pivotvektor $\to (3, 2, 1)^T$ und $L_{21} = 0.625$ sowie $L_{31} = 0.0275$:

$$A_s \to R_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.2365 & 0.1385 \\ 0 & 0.74575 & -0.23775 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\to p = (3, 1, 2)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = -0.31713$:

$$R_1 \to R =_5 \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.74575 & -0.23775 \\ 0 & 0 & 0.063102 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0275 & 1 & 0 \\ 0.625 & -0.31713 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil c) Wir müssen zunächst die Skalierung und Pivotisierung in b einarbeiten: $b \to \tilde{b}$ mit $\tilde{b}_i = b_{p_i}/s_{p_i}$, also $\tilde{b} = (0.6, 0.002, 0.1)^T$. Danach Vorwärts- Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0275 & 1 & 0 \\ 0.625 & -0.31713 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.002 \\ 0.1 \end{pmatrix} \to y =_5 \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.0145 \\ -0.27960 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.74575 & -0.23775 \\ 0 & 0 & 0.063102 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.0145 \\ -0.27960 \end{pmatrix} \to x =_5 \begin{pmatrix} 1.1249 \\ -1.4320 \\ -4.4309 \end{pmatrix}$$

Teil d) Zwei Zeilenvertauschungen, also kein Vorzeichenwechsel; aber skaliert:

$$\det(A) = \prod s_i \cdot \prod R_{ii} = 50000 \,\cdot\, 0.8 \cdot 0.74575 \cdot 0.063102 =_5 1882.3$$

Teil e) $\|A\|_\infty = \max\{s_i\} = 1000 \to \kappa_\infty(A) \approx 3500 \quad (3598.3)$. Die Kondition ist also so schlecht, dass wir mit einem Verlust von bis zu drei Stellen rechnen müssen.