Musterlösung zu TÜV Kapitel 11

MC-11-1

$$\begin{array}{lll} z_1 := y & \rightarrow & z_1' = z_2 \\ z_2 := y' & \rightarrow & z_2' = z_3 \\ z_3 := y'' & \rightarrow & z_3' = y''' = -y' + ty = -z_2 + tz_1 \end{array}$$

Anfangsdaten:

$$\begin{array}{ll} z_1(0) = y(0) & = 0 \\ z_2(0) = y'(0) & = 1 \\ z_3(0) = y''(0) & = 2 \end{array}$$

$\Longrightarrow$

b) Aussage richtig.

a), c), d) Aussagen falsch.

MC-11-2

$$\begin{array}{lll} v_1 := y & \rightarrow & v_1' = v_2 \\ v_2 := y' & \rightarrow & v_2' = y'' = 2z' + \cos(z) = 2v_4 + \cos(v_3) \\ v_3 := z & \rightarrow & v_3' = v_4 \\ v_4 := z' & \rightarrow & v_4' = z'' = e^t - \sin(y) = e^t - \sin(v_1) \end{array}$$

Anfangsdaten:

$$\begin{array}{ll} v_1(0) = y(0) & = 0 \\ v_2(0) = y'(0) & = 1 \\ v_3(0) = z(0) & = 0 \\ v_4(0) = z'(0) & = -1 \end{array}$$

$\Longrightarrow$

c) Aussage richtig.

a), b) Aussagen falsch.

MC-11-3

Trapezmethode: $y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2}\left(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})\right)$

a) Aussage richtig, denn:
Zur Berechnung von y^{j+1} wird nur y^j benötigt und nicht noch weitere Näherungswerte $y^{j-1}, \ldots, y^{j-h}$ (siehe Definition Einschrittverfahren, Buch, S. 386)

b) Aussage richtig, denn:
Die Verfahrensvorschrift kann für beliebiges f nicht durch eine explizite Funktion beschrieben werden (siehe Definition „implizite Verfahren “, Buch, S. 386).

c) Aussage falsch, siehe d).

d) Aussage richtig, denn die Trapezmethode ergibt sich als Newton-Côtes-Formel, in dem man f ersetzt durch eine lineare Interpolation in den Stützstellen t_j und t_{j+1}. Der zugehörige Interpolationsfehler ist $\mathcal{O}(h^2)$.

MC-11-4

Trapezmethode:

$$y^{j+1} = y^j + \tfrac{h}{2}\left(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})\right)$$

$$= y^j + \tfrac{h}{2}\left((A + t_jB)y^j + (A + t_{j+1}B)y^{j+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \left(I - \tfrac{h}{2}(A + t_{j+1}B)\right) y^{j+1} = \left(I + \tfrac{h}{2}(A + t_jB)\right) y^j$$

$$\Leftrightarrow\ y^{j+1} = \left(I - \tfrac{h}{2}(A + t_{j+1}B)\right)^{-1} \left(I + \tfrac{h}{2}(A + t_jB)\right) y^j$$

<u>hier:</u> $h = 1,\ j = 0,\ t_j = 0,\ t_{j+1} = t_j + h = 1$

$$y^1 = \left(I - \tfrac{1}{2}(A + B)\right)^{-1} \left(I + \tfrac{1}{2}A\right) y^0$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} y^0$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{33} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} y^0$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{66} & -\frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 66 \\ 22 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

a) Aussage richtig.

b), c), d) Aussagen falsch.

MC-11-5

Die Idee des eingebetteten RK-Verfahrens ist, zwei RK-Verfahren mit unterschiedlicher Konsistenzordnung zu verwenden. Der Näherungswert, der sich mit den RK-Verfahren höherer Ordnung berechnet, wird dann als die „exakte Lösung" interpretiert. Damit kann dann der Fehler für den Näherungswert, der mit den RK-Verfahren niedriger Ordnung berechnet wird, abgeschätzt werden. Dieser „Fehler" kann dann zur Schrittweitensteuerung benutzt werden.
Die Verfahren heißen „eingebettet", da sich das RK-Verfahren höherer Ordnung aus den RK-Verfahren niedriger Ordnung ergibt, wobei die zugehörige Tabelle um eine Zeile ergänzt wird, d.h. es werden möglichst viele berechnete Informationen des RK-Verfahrens niedriger Ordnung verwendet. $\Longrightarrow$

a), b) Aussagen falsch.

c), d) Aussagen richtig.

MC-11-6

(vgl. Buch, Kap. 11.5.1, Seite 387 ff.)

Lokaler Abbruchfehler:

$$\delta_{j,h} := y(t_{j+1}) - y(t_j) - h\Phi_f(t_j, y(t_j), h)$$

Konsistenzfehler:

$$\tau_{j,h} := \frac{\delta_{j,h}}{h}$$

$\Longrightarrow$

a), b), c) Aussagen richtig.

d) Aussage falsch.

MC-11-7

a) Aussage falsch, denn bei Verwendung eines expliziten Verfahrens für steife Probleme erhält man aufgrund der beschränkten Stabilitätsintervalle sehr kleine Schrittweiten.

b) Aussage richtig, siehe a).

c) Aussage richtig, da das klassisches RK-Verfahren ein explizites Verfahren ist und diese immer ein beschränktes Stabilitätsintervall haben.

d) Aussage richtig, denn die Trapezmethode ist ein implizites Verfahren, bei dem das Stabilitätsintervall nicht beschränkt ist.

MC-11-8

Impliziter Euler:

$$\underline{y}^{j+1} = \underline{y}^j + h\underline{f}(t_{j+1}, \underline{y}^{j+1})$$

hier:

$$\underline{y} = (y^1, z^1)^T, \ \underline{f} = (f, g), \ j = 0$$

$\Longrightarrow$

a) Aussage richtig.

b), c), d) Aussagen falsch.

MC-11-9

$$\circledast \quad y'(t) = f(t)$$

Alternative 1: (Vorwärtsintegration)

$$\circledast \Rightarrow \int_a^t y'(z)\,dz = \int_a^t f(z)\,dz =: Q(f, a, t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = y(a) + Q(f, a, t)$$

Setze $y(a) = Q(f, a, a) = 0 \Rightarrow y(b) = Q(f, a, b) = \int_a^b f(z)\,dz$

$\Longrightarrow$

d) Aussage richtig mit $a = 0, \ b = 1, \ f(z) = e^{-2z}$.

a), c) Aussagen falsch.

Alternative 2: (Rückwärtsintegration)

$$\circledast \Rightarrow \int_t^b y'(z)\,dz = \int_t^b f(z)\,dz =: Q(f,t,b)$$

$$\Leftrightarrow y(b) - y(t) = Q(f,t,b)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = y(b) - Q(f,t,b)$$

Setze $y(b) = 0 = Q(f,b,b) \Rightarrow y(a) = -Q(f,a,b) = -\int_a^b f(z)\,dz$

$\Longrightarrow$

b) Aussage richtig mit $a = 0,\ b = 1,\ f(z) = e^{-2z}$.

MC-11-10

Für den Gesamtfehler gilt mit (11.61) (siehe Buch, S. 398)

$$e \sim h^{-1}(h^{p+1} + 10^{-m})$$

wobei p die Konvergenzordnung des Verfahrens ist und m die Stellen der verwendeten Gleitpunktarithmetik bezeichnet. Sei hier $m = \infty$, d.h. exakte Rechnung. Für das Verfahren 1. Ordnung (p=1) wird die vorgegebene maximale Fehlertoleranz nach $N = 1000$ Schritten erreicht, d.h.

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{1000} = \frac{1}{1000}$$

Für ein Verfahren p-ter Ordnung ergibt sich dann für den Gesamtfehler (bei exakter Rechnung)

$$e \sim h^p \sim \text{Toleranz} \sim \frac{1}{1000}$$

also:

$$h^p = \left(\frac{1}{N}\right)^p \sim \frac{1}{1000}$$

d.h.

$$N \sim (1000)^{\frac{1}{p}}$$

$\Longrightarrow\ p = 2: \quad N \approx 30$
$\quad p = 3: \quad N \approx 10$

$\Longrightarrow$

a), b) Aussagen falsch.

c), d) Aussagen richtig.

MC-11-11

Wendet man ein Verfahren auf die Testgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t),\ y(0) = y_0$$

an, dann erhält man durch Rekursion

$$y^j = (g(\lambda h))^j\, y^0$$

wobei g ein Polynom (explizites Verfahren) b.z.w. ein Quotient aus zwei Polynomen (implizites Verfahren) ist.
Das Stabilitätsintervall ist definiert durch

$$S := \{\lambda h|\ |g(\lambda h)| \leq 1\}$$

$\Longrightarrow$

b), c), d) Aussagen falsch.

Für Systeme geht man analog vor. Läßt sich die Systemmatrix A diagonalisieren, d.h. es gibt reguläre Matrizen $L,\ R$ mit $LR = I$ und

$$L^T AR = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D,\ \lambda_i \text{ Eigenwerte von } A$$

Dann geht $y'(t) = Ay(t),\ y(0) = y_0$ mit $z(y) := Ly(t)$ über in

$$z'(t) = Dz(t),\ z(0) = Ly_0$$

Dies ist ein entkoppeltes System von Differentialgleichungen für

$$z_i'(t) = \lambda_i z_i(t),\ z_i(0) = (Ly_0)_i,\ i = 1, \ldots, n$$

Wendet man auf diese Gleichungen das Verfahren an, so heißt dieses stabil, falls

$$S_i = \{\lambda_i h|\ |g(\lambda_i h)| \leq 1\},\ i = 1, \ldots, n$$

$\Longrightarrow$

b) Aussage richtig.