Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Prof. Dr. Arnold Reusken

Numerik für Maschinenbauer

TÜV (Kapitel 11) oder: Was man weiss, was man wissen sollte

MC–11–1 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + y'(t) = t\,y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1,\; y''(0) = 2$$

Wir setzen $z(t) := (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind zu dem obigen Problem äquivalent?

○ $$z'(t) = \begin{pmatrix} t\,z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) + z_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

○ $$z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

○ $$z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

○ $$z'(t) = \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MC–11–2 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) - 2z'(t) &= \cos(z(t)) && \text{mit} \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1 \\ z''(t) + \sin(y(t)) &= e^t && \text{mit} \quad z(0) = 0,\; z'(0) = -1 \end{aligned}$$

Wir setzen $v(t) := (v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t))^T$. Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind zu dem obigen Problem äquivalent?

○ $$v'(t) = \begin{pmatrix} v_3(t) \\ 2v_4(t) + \cos(v_2(t)) \\ v_4(t) \\ -\sin(v_1(t)) + e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

○ $$v'(t) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ 2v_4(t) + \cos(v_3(t)) \\ v_3(t) \\ -\sin(v_1(t)) + e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

○ $$v'(t) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ 2v_4(t) + \cos(v_3(t)) \\ v_4(t) \\ -\sin(v_1(t)) + e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MC–11–3 Wir betrachten die Trapezmethode zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t,y), \quad y(t_0) = y^0$$
$$y^{j+1} = y^j + \tfrac{h}{2}\left(f(t_j,y^j) + f(t_{j+1},y^{j+1})\right) \qquad j = 0,\ldots,n-1$$

mit $h = \dfrac{T - t_0}{n}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

◯ Die Trapezmethode ist ein Einschrittverfahren
◯ Die Trapezmethode ist implizit
◯ Die Trapezmethode hat die Konvergenzordnung 1
◯ Die Trapezmethode hat die Konvergenzordnung 2

MC–11–4 Zu dem Anfangswertproblem

$$y'(t) = (A + tB)\, y(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und $y(0) = (66,22)^T$ soll $y(1)$ durch einen Schritt der Trapezmethode mit der Schrittweite $h{=}1$ approximiert werden. Welche der folgenden Näherungen sind korrekt?

◯ $(-11, -5)^T$
◯ $(-66/5, -286/45)^T$
◯ $(-22, -10)^T$
◯ $(-330, -462/5)^T$

MC–11–5 Welche der folgenden Aussagen sind im Zusammenhang mit eingebetteten Runge–Kutta–Verfahren korrekt?

◯ Bei eingebetteten Runge–Kutta–Verfahren werden immer zwei Runge–Kutta–Verfahren gleicher Konsistenzordnung kombiniert.
◯ Bei eingebetteten Runge–Kutta–Verfahren wird immer ein explizites Runge–Kutta–Verfahren mit einem impliziten Runge–Kutta–Verfahren kombiniert.
◯ Mit eingebetteten Runge–Kutta–Verfahren kann man effizient den lokalen Abbruchfehler schätzen.
◯ Eingebettete Runge–Kutta–Verfahren werden zur Schrittweitensteuerung benutzt.

MC–11–6 Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

◯ Der lokale Abbruchfehler misst, wie sehr der durch das nummerische Verfahren gelieferte Wert nach *einem* Schritt von der exakten Lösung abweicht.
◯ Eine Schätzung des lokalen Abbruchfehlers kann man zur Schrittweitensteuerung verwenden.
◯ Die Größe des lokalen Abbruchfehlers bestimmt die Konsistenzordnung.
◯ Eine sehr hohe Konsistenzordnung kann man nur mit impliziten Verfahren realisieren.

MC–11–7 Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

○ Für steife Probleme ist das explizite Euler–Verfahren besser geeignet als das implizite Euler–Verfahren.

○ Für steife Probleme ist das implizite Euler–Verfahren besser geeignet als das explizite Euler–Verfahren.

○ Das klassische Runge–Kutta–Verfahren hat ein Stabilitätsintervall der Form $(-a, 0)$ mit $0 < a < \infty$

○ Das Stabilitätsintervall der Trapezmethode ist $(-\infty, 0)$

MC–11–8 Das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y(x), z(x)) \\ g(x, y(x), z(x)) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}$$

soll durch einen Schritt des impliziten Euler–Verfahrens zur Schrittweite h approximiert werden; dieser sei $(y^1, z^1)^T$. Dann sind y^1 und z^1 die Lösungen von

○ $\begin{aligned} y^1 &= y^0 + h\, f(h, y^1, z^1) = 0 \\ z^1 &= z^0 + h\, g(h, y^1, z^1) = 0 \end{aligned}$

○ $\begin{aligned} y^1 &= y^0 + h\, f(h, y^1, z^0) = 0 \\ z^1 &= z^0 + h\, g(h, y^0, z^1) = 0 \end{aligned}$

○ $\begin{aligned} y^1 &= y^0 + h\, f(0, y^1, z^1) = 0 \\ z^1 &= z^0 + h\, g(0, y^1, z^1) = 0 \end{aligned}$

○ $\begin{aligned} y^1 &= y^0 + h\, f(0, y^1, z^0) = 0 \\ z^1 &= z^0 + h\, g(0, y^0, z^1) = 0 \end{aligned}$

MC–11–9 Ihr Kollege möchte das Integral $Q := \int_0^1 e^{-2t}\, dt$ nummerisch berechnen. Sie haben aber keine Software für nummerische Quadratur wohl aber zur Lösung von (gewöhnlichen) Anfangswertproblemen zur Hand. Es sei jeweils $y_h(t)$ die nummerische Approximation (zu einer Schrittweite h) der exakten Lösung $y(t)$. Welche der folgenden Approximation sind korrekt?

○ $y'(t) = -2\, y(t)$ mit $y(0) = 0$ $\quad Q \approx y_h(1)$

○ $y'(t) = \exp(-2t)$ mit $y(1) = 0$ $\quad Q \approx -y_h(0)$ ($h < 0$)

○ $y'(t) = \exp(-2t)\, y(t)$ mit $y(0) = 0$ $\quad Q \approx y_h(1)$

○ $y'(t) = \exp(-2t)$ mit $y(0) = 0$ $\quad Q \approx y_h(1)$

MC–11–10 Ein *stetiges* Runge–Kutta–Verfahren

◯ ist ein spezialisiertes Runge–Kutta–Verfahren, das bei Differenzialgleichungen mit stetiger (aber nicht überall Lipschitz–stetiger) rechten Seite bessere Approximiationen liefert als das klassische Runge–Kutta–Verfahren.

◯ ist ein Runge–Kutta–Verfahren, das nicht nur Approximationen zu diskreten Zeitpunkten, sondern stückweise Polynome in der unabhängigen Variablen liefert.

◯ ist ein spezielles eingebettetes Runge–Kutta–Verfahren, bei dem die zwei einzelnen Verfahren zu einer stetig–parametrisierten Schar von Verfahren gehören.

MC–11–11 Für ein Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $y(0) = y^0$ soll nummerisch eine Approximation an $y(1)$ mit einem vorgegebenen maximalen Fehler berechnet werden. In einem konkreten Falle benötigt ein Verfahren erster Ordnung dazu 1000 Schritte. Wieviele Schritte benötigt dann — in etwa — ein Verfahren höherer Ordnung? Welche der folgenden Zahlen sind korrekt?

◯ Ein Verfahren 3. Ordnung benötigt ca. 300 Schritte

◯ Ein Verfahren 2. Ordnung benötigt ca. 300 Schritte

◯ Ein Verfahren 3. Ordnung benötigt ca. 10 Schritte

◯ Ein Verfahren 2. Ordnung benötigt ca. 30 Schritte

MC–11–12 Ein Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems mit der Schrittweite h und dem Stabilitätintervall S — bitte richtige Aussagen ankreuzen —

◯ ist stabil, wenn $h \in S$ liegt.

◯ approximiert in stabiler Weise ein Anfangswertproblem der Form $y'(t) = A\,y(t)$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, falls das Produkt aus der Schrittweite h und dem kleinsten Eigenwert von A in S liegt.

◯ approximiert stabil die spezielle, skalare Testgleichung $y'(t) = \lambda\,y(t)$ für alle positiven Schrittweiten, falls $\lambda \in S$ gilt.

◯ approximiert stabil die spezielle, skalare Testgleichung $y'(t) = \lambda\,y(t)$ für alle positiven Schrittweiten, falls $h\,\lambda \leq \min S$ gilt.