Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Prof. Dr. Arnold Reusken

Numerik für Maschinenbauer

TÜV (Kapitel 4) oder: Was man weiss, was man wissen sollte

MC–4–1 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind **nicht** korrekt?

- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit, falls A den Rang n hat.
- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch.
- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit
- ◯ $A^T A$ ist invertierbar

MC–4–2 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := \frac{1}{2} \|A\,x - b\|_2^2$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\nabla\varphi(x) = A^T (A\,x - b)$
- ◯ $\nabla\varphi(x) = A\,x - b$
- ◯ $\nabla\varphi(x) = 0 \iff A^T A\,x = A^T b$
- ◯ $\nabla\varphi(x) = 0 \iff A\,x = b$

MC–4–3 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ Für $x^\star \in \mathbb{R}^n$: $\|A\,x^\star - b\|_2 = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \iff A^T A\,x^\star = A^T b$
- ◯ Für $x^\star \in \mathbb{R}^n$: $\|A\,x^\star - b\|_2 = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \iff A\,x^\star = b$
- ◯ $A^T A$ ist symmetrisch
- ◯ $A^T A$ ist orthogonal
- ◯ $A^T A$ ist invertierbar
- ◯ A ist invertierbar

MC–4–4 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ Die Matrix R kann man mittels Householder–Transformationen bestimmen
- ◯ Die Matrix R kann man mittels Givens–Transformationen bestimmen
- ◯ Die Matrix R kann man dem Cholesky–Verfahren bestimmen

MC–4–5 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{Rang}(A) = n$. Die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$.
Welche der folgenden Vorgehensweisen liefern denselben Vektor $x^\star$?

- ◯ $z^\star$ sei die Minimalstelle von $\min\limits_{z\in\mathbb{R}^n} \|\hat{A}\,z - b\|_2$ und $x^\star = T\,z^\star$ mit $\hat{A} = A\,T$, wobei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige, aber reguläre Matrix ist.
- ◯ $x^\star$ ist die Minimalstelle von $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|\hat{A}\,x - \hat{b}\|_2$ mit $\hat{A} = T\,A$ und $\hat{b} = T\,b$, wobei $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine beliebige, aber reguläre Matrix ist.
- ◯ $z^\star$ sei die Minimalstelle von $\min\limits_{z\in\mathbb{R}^n} \|A\,f(z) - b\|_2$ und $x^\star = f(z^\star)$, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige, invertierbare Funktion ist.

MC–4–6 Zu gegebenen Ansatzfunktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$, sollen die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass das Modell $m(x,c) := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x)$ die Daten (x_i, y_i), $1 \le i \le m$, möglichst gut wiedergibt, d.h. die Fehlerquadratsumme minimiert. Im Folgenden sei $x := (x_1, \ldots, x_m)^T$ und $y := (y_1, \ldots, y_m)^T$.
Welche der folgenden Vorgehensweisen sind geeignet, den Koeffizientenvektor $c := (c_1, \ldots, c_n)^T$ zu bestimmen?

- ◯ c minimiert $\min\limits_{c\in\mathbb{R}^n} \|A\,c - y\|_2$ wobei $A_{i,k} = \varphi_k(x_i)$ ist.
- ◯ c minimiert $\min\limits_{c\in\mathbb{R}^n} \|A\,c - y\|_2$ wobei $A_{i,k} = \varphi_i(x_k)$ ist.
- ◯ c minimiert $\min\limits_{c\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{i=1}^{m} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \big(c_k \cdot \varphi_k(x_i)\big) - y_i \right]^2$
- ◯ $c^T\,\Phi = y$ mit $\Phi_{i,k} := \varphi_k(x_i)$

MC–4–7* Es seien $A,\, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebige Matrizen vom Rang n . Zu $c,\, d \in \mathbb{R}^m$ löse $x \in \mathbb{R}^n$ das Ausgleichsproblem $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - c\|_2$ und y das Ausgleichsproblem $\min\limits_{y\in\mathbb{R}^n} \|B\,y - d\|_2$; weiter sei $z \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des Ausgleichsproblems $\min\limits_{z\in\mathbb{R}^n} \|A\,z - d\|_2$.
Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

- ◯ $x + y$ löst das Ausgleichsproblem $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \min\limits_{y\in\mathbb{R}^n} \|A\,x + B\,y - (c+d)\|_2$
- ◯ $u = x + y$ löst das Ausgleichsproblem $\min\limits_{u\in\mathbb{R}^n} \|(A+B)\,u - (c+d)\|_2$
- ◯ $u = x + z$ löst das Ausgleichsproblem $\min\limits_{u\in\mathbb{R}^n} \|A\,u - (c+d)\|_2$
- ◯ $u = s\,x$ löst das Ausgleichsproblem $\min\limits_{u\in\mathbb{R}^n} \|s\,A\,u - s\,c\|_2$ für alle $s \neq 0$
- ◯ $u = s\,x$ löst das Ausgleichsproblem $\min\limits_{u\in\mathbb{R}^n} \|A\,u - s\,c\|_2$ für alle $s \neq 0$