Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Prof. Dr. Arnold Reusken

Numerik für Maschinenbauer

TÜV (Kapitel 5) oder: Was man weiss, was man wissen sollte

MC–5–1 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\det(M) \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ $f(x) = 0 \iff x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x - M\,f(x)$
- ◯ $f(x) = 0 \iff x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x + M\,f(x)$
- ◯ $f(x) = 0 \iff x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := M\,f(x)$
- ◯ $f(x) = 0 \iff x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x - f(x)\,M$
- ◯ $f(x) = 0 \iff x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) := x - f(M\,x)$

MC–5–2 Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ Falls $|\Phi'(x^\star)| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^\star|$ hinreichend klein.
- ◯ Falls $|\Phi'(x^\star)| > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^\star$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^\star$.
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.
- ◯ Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^\star|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.

MC–5–3 Es sei $f(x) = x^5 + e^x - 2$. Dann hat das Newton–Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f die Form

- ◯ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{x_k^5 + e^{x_k} - 2}{5x_k^4 + e^{x_k}}$ für $k = 0, 1, \ldots$
- ◯ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{5x_k^4 + e^{x_k}}{x_k^5 + e^{x_k} - 2}$ für $k = 0, 1, \ldots$
- ◯ $x_{k+1} = \dfrac{4x_k^5 + (x_k - 1)\,e^{x_k} + 2}{5x_k^4 + e^{x_k}}$ für $k = 0, 1, \ldots$
- ◯ $x_{k+1} = \dfrac{6x_k^5 + (x_k - 1)\,e^{x_k} + 2}{5x_k^4 + e^{x_k}}$ für $k = 0, 1, \ldots$

MC–5–4 Es sei $f(x) = e^x + x - 2$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle in $[0, 1]$
- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle in $\mathbb{R}$
- ◯ Das Newton–Verfahren konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$.
- ◯ Das Newton–Verfahren konvergiert nur für Startwerte x_0 , die hinreichend nahe der Nullstelle sind.

MC–5–5 Beim Newton–Verfahren wird oft eine Dämpfungsstrategie benutzt. Diese dient dazu,

- ◯ die Stabilität des Verfahrens zu verbessern.
- ◯ globale Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.
- ◯ den Einzugsbereich des Verfahrens zu vergrößern.
- ◯ die Berechnung von Ableitungen zu vermeiden.

MC–5–6 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nicht–singuläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) := A\,x + b$. Zu einem gegebenen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ lautet die erste Iterierte des Newton–Verfahrens angewandt auf f

- ◯ $x_1 = -A^{-1}\,b$
- ◯ $x_1 = x_0 - (A\,x_0 + b)$
- ◯ $x_1 = A\,x_0 + b$

Das Newton–Verfahren für diese Funktion konvergiert — bei beliebigem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ —

- ◯ in einem Schritt.
- ◯ in n Schritten.
- ◯ nur, falls $\|A\| < 1$.
- ◯ nicht in endlich vielen Schritten.
- ◯ u.U. gar nicht.

MC–5–7 Kreuzen Sie das effizienteste unter den folgenden Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an!

- ◯ Bisektion
- ◯ Newton–Verfahren
- ◯ Sekanten–Verfahren

MC–5–8 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zur Berechnung einer Nullstelle von f verwendet man das Newton–Verfahren, bei dem jedoch die linearen Gleichungssysteme(, die in jedem Schritt gelöst werden müssen) nur **approximativ** gelöst werden. Für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiere die Folge dieser Iterierten gegen ein $x^\star \in \mathbb{R}^n$. Dann

- ◯ konvergiert das Verfahren u.U. langsamer als das exakte Newton–Verfahren, aber es gilt $f(x^\star) = 0$
- ◯ konvergiert das Verfahren genauso schnell wie das exakte Newton–Verfahren, wobei $x^\star$ i.A. keine exakte Nullstelle von f ist, jedoch $\|f(x^\star)\|$ umso kleiner wird, je genauer man die linearen Gleichungssysteme löst.
- ◯ kann man nichts über die Größe von $\|f(x^\star)\|$ aussagen.

MC–5–9 Für eine kontrahierende Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Kontraktionszahl $\frac{1}{2}$ gelte für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|\Phi(x_0) - x_0\| \leq 16$. Es werde gemäß $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ iteriert; dann gilt mit dem Fixpunkt $x^\star$ von Φ die Abschätzung $\|x_k - x^\star\| \leq 2^{-10}$, für

- ◯ $k = 15$
- ◯ $k = 20$ aber nicht für $k = 15$
- ◯ $k = 25$ aber nicht für $k = 20$
- ◯ $k = 30$ aber nicht für $k = 25$

MC–5–10 Die Funktion $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ hänge teilweise linear von ihren Variablen ab, genauer habe sie die Form

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} A\,x - b \\ C\,x + g(y) \end{pmatrix}$$

und einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ und invertierbaren Matrizen $A,\ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Iterationen entsprechen dem Newton–Verfahren für f ?

- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\, b$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\,(C\,x_{k+1} + g(y_k))$
- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\,(b - x_k)$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\,C^{-1}\,(x_k + g(y_k))$
- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\,(b - x_k)$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\,\big(C^{-1}\,x_k + g(y_k)\big)$
- ◯ $x_{k+1} = A^{-1}\,(b - x_k)$ und $y_{k+1} = y_k - g'(y_k)^{-1}\,(x_{k+1} + g(y_k))$