Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Prof. Dr. Arnold Reusken

Numerik für Maschinenbauer

TÜV (Kapitel 8) oder: Was man weiss, was man wissen sollte

MC–8–1 Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade n . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

○ $\{1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n\}$ bildet eine Basis von Π_n

○ $\{\alpha_0,\ \alpha_1 x,\ \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n

○ $\left\{1,\ x - \alpha_1,\ (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),\ \ldots,\ \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n

○ Der Raum Π_n hat die Dimension n

MC–8–2 Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

○ $P(\Phi \mid x_0, \ldots, x_n) = \Phi$ für alle $\Phi \in \Pi_n$

○ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ ist ein Polynom vom Grade n

○ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$

○ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man mit dem Neville–Aitken–Schema bestimmen

MC–8–3 Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

○ Es gilt immer $\delta_n = 1$

○ $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$

○ $\delta_0 = f(x_0)$

○ $[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$

MC–8–4 Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$; weiter sei f eine beliebig glatte Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ○ $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Horner–Schema bestimmen
- ○ $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit der Newton'schen Interpolationsformel bestimmen
- ○ Der Fehler $\max\limits_{x \in [a,b]} \left| f(x) - P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) \right|$ wird für hinreichend großes n beliebig klein.
- ○ $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ mit einem geeigneten $\delta_n \in \mathbb{R}$

MC–8–5 Es seien $l_{jn}(x)$, $j = 0, \dots, n$ die Lagrange'schen Fundamentalpolynome zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ mit $n \ge 2$.

Es sei $p(x) := \sum_{j=0}^{n} l_{jn}(x)\, x_j^2$. Dann hat $p(x)$ die Darstellung $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, x^j$.

Wie lauten die untersten 3 Koeffizienten $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$?

- ○ $(0, 0, 1)$
- ○ $(0, 1, 1/2)$
- ○ $(0, n, 0)$
- ○ $(0, 0, n/2)$
- ○ diese hängen von $x_0, \dots, x_n$ ab.

MC–8–6 Wie lautet das Interpolationspolynom 3. Grades zu den Daten $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$?

- ○ $x + 1$
- ○ $x^3 + x^2 + x + 1$
- ○ $x^3 + 1$
- ○ $x(x - 1)(x - 2) + 1$

MC–8–7 Sie benötigen eine Approximation von $f^{(n)}(x)$ für $x_1 < x < x_{n-1}$, wobei $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ und $f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$. Welche der folgenden Ausdrücke gibt die beste Approximation an $f^{(n)}(x)$?

- ○ $[x_0, \dots, x_n]\, f$
- ○ $[x_1, \dots, x_{n-1}]\, f$
- ○ $n!\, [x_0, \dots, x_n]\, f$
- ○ $(n - 2)!\, [x_1, \dots, x_{n-1}]\, f$

MC–8–8 Es sei $p(x)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, wobei $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ sei. Dann gilt für den Interpolationsfehler $|p(x) - f(x)|$ an einer Stelle $x < x_0$

- ○ $|p(x) - f(x)| \leq \left(\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|\right) \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$ für ein $\xi \in (x_0, x_n)$
- ○ $|p(x) - f(x)| \leq \left(\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|\right) \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$ für ein $\xi \in (x, x_n)$
- ○ $|p(x) - f(x)| \leq \left(\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|\right) \cdot \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{(n)!}$ für ein $\xi \in (x_0, x_n)$
- ○ $|p(x) - f(x)| \leq \max_{\theta \in (x_0, x_n)} \left|\prod_{j=0}^{n} (\theta - x_j)\right| \cdot \max_{\xi \in (x_0, x_n)} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$

MC–8–9 Es sei $I := \int_c^d f(x)\, dx$, $h := d - c$, $m > 0$ und $x_j = c + \frac{j\,h}{m}$ für $j = 0, \ldots, m$. Wir definieren $I_m(f) := \int_c^d P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$

wobei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_m))$ mit $x_0 < \ldots < x_m$ ist. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ○ $I_m(f)$ definiert die Newton–Côtes–Formel zur Approximation von I
- ○ $I_1(f) = \frac{h}{2}\big(f(c) + f(d)\big)$
- ○ $I_m(q) = \int_c^d q(x)\, dx$ für alle Polynome q
- ○ $\big|I - I_m(f)\big| \leq c\, h^m$ mit einer von h und f unabhängigen Konstanten c

MC–8–10 Es sei $I := \int_c^d f(x)\, dx$ und $I_m(f) = \sum_{i=0}^{m} w_i\, f(x_i)$ eine Quadraturformel zur Approximation von I . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ○ Wenn $I_m(f)$ einer Newton–Côtes–Formel entspricht, so sind die Stützstellen x_i äquidistant.
- ○ Wenn $I_m(f)$ einer Gauß–Quadratur entspricht, so sind die Stützstellen x_i äquidistant.

- ◯ Wenn $I_m(f)$ einer Newton–Côtes–Formel entspricht, so sind die Gewichte w_i stets positiv.
- ◯ Wenn $I_m(f)$ einer Gauß–Quadratur entspricht, so sind die Gewichte w_i stets positiv.

MC–8–11 Das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ lässt sich durch eine einfache Substitution überführen in

- ◯ $\displaystyle 2\int_0^1 \cos(y^2)\,dy$
- ◯ $\displaystyle \int_0^1 \frac{\sin(y)}{y}\,dy$
- ◯ $\displaystyle \int_0^1 \cos(y^2)\,dy$

MC–8–12 Eine Gauß–Quadratur–Formel mit $m+1$ Funktionsauswertungen ist exakt für Polynome vom Grade

- ◯ $m+1$
- ◯ $2m$
- ◯ $2m+1$
- ◯ $2m+2$

MC–8–13 Eine einfache Gauß–Quadratur–Formel für das Integral $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ ist gegeben durch $I_g(f) = f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. Das Integral $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$ soll mit einer geeignet transformierten Form dieser Quadratur–Formel approximiert werden. Wie lautet diese Form?

- ◯ $\displaystyle \frac{\pi}{2}\left(f(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,\pi) + f(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\,\pi)\right)$
- ◯ $\displaystyle \frac{2}{\pi}\left(f(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,\pi) + f(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\,\pi)\right)$
- ◯ $\displaystyle \frac{\pi}{2}\left(f(\frac{-\pi}{\sqrt{3}}) + f(\frac{\pi}{\sqrt{3}})\right)$
- ◯ $\displaystyle \frac{2}{\pi}\left(f(\frac{-\pi}{\sqrt{3}}) + f(\frac{\pi}{\sqrt{3}})\right)$