Laborübung 4: Gestörte lineare Gleichungssysteme

Laden Sie die für diese Laborübung benötigte Datei `LGS.sci` von der Homepage und laden Sie die Funktionen mit dem Befehl

```
getf LGS.sci
```

Versuch 1 — Kondition von Matrizen

Die folgenden Funktionen liefern verschiedene $n \times n$–Matrizen `A` zurück, die Sie für den Versuch verwenden können:

- `Laplace(n)`
- `Lehmer(n)`
- `Pascal(n)`
- `Hilbert(n)`

Mit dem SciLab–Befehl `cond(A)` können Sie die Kondition einer Matrix `A` berechnen. Tragen Sie in der folgenden Tabelle für die verschiedenen Matrixtypen und gegebenes n die Kondition der zugehörigen Matrix ein:

n	`Laplace`	`Lehmer`	`Pascal`	`Hilbert`
5				
10				
20				

Versuch 2 — relative Fehler

Werden die Daten des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

gestört, so kann der relative Fehler r_x in der Lösung x durch

$$r_x \quad \leq \quad \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot r_A}(r_A + r_b)$$

abgeschätzt werden, falls $\kappa(A) \cdot r_A < 1$. Dabei bezeichnen r_A und r_b die relativen Fehler in A bzw. b. Diese *obere Schranke* berücksichtigt nur die Größe der Eingabefehler, nicht aber deren Struktur. In dem folgenden Versuch werden wir sehen, dass der tatsächliche Fehler auch von der Art der Störung abhängt.

Die exakte Lösung `x` soll mit der numerischen Lösung `y` des gestörten Gleichungssystems

$$\underbrace{(A + s_A \cdot \Delta A)}_{\tilde{A}}\ y = \underbrace{(b + s_b \cdot \Delta b)}_{\tilde{b}}$$

verglichen werden, wobei $||\Delta A|| = ||\Delta b|| = 1$ ist und s_A bzw. s_b die Größe der Störung beeinflussen.

Nutzen Sie zur Lösung eines Gleichungssystems die Funktion `y=svd_solve(A,b)`, die auch bei großer Kondition der Matrix die Gleichung stabil löst.

Die Funktion

```
[x,dA,db,smax] = pert_Matrix(A, Option, rhs)
```

liefert eine geeignete exakte Lösung `x`, eine Störung `dA` $= \Delta A$ der Matrix von der Größe $||\Delta A|| = 1$, eine Störung `db` $= \Delta b$ der rechten Seite von der Größe $||\Delta b|| = 1$ und eine Größe `smax` so, dass $A + s_A \cdot \Delta A$ für alle $0 \leq s_A <$ `smax` (zumindest) regulär ist.

Der Wert von `Option` bestimmt die *Art* der Störung:

- `Option = 'b'` liefert die gutartigste Störung (*best case*),
- `Option = 'r'` generiert eine zufällige Störung (*random*),
- `Option = 'w'` erzeugt die ungünstigste Störung (*worst case*).

Der Wert von `rhs` gibt an, ob nur die rechte Seite (`rhs=%t`) oder nur die Matrix (`rhs=%f`) gestört werden soll. In Abhängigkeit davon wird die exakte Lösung vorgegeben.

Berechnen Sie nach Aufruf von `pert_Matrix` zu der exakten Lösung `x` immer die zugehörige rechte Seite `b = A * x`. Bestimmen Sie dann die gestörte Matrix $\tilde{A}$, die gestörte rechte Seite $\tilde{b}$ sowie die Lösung y der gestörten Gleichung $\tilde{A}y = \tilde{b}$.

Schreiben Sie eine Funktion

```
function T= LGS_Tabelle(MatType, n, Option)
```

die zu einem gegebenen Matrixtyp `MatType` (also `Laplace`, `Lehmer`, `Pascal` oder `Hilbert`), der Dimension `n` und der Störungsart `Option` die folgende Tabelle `T` als Matrix zurückgibt,

s_A	s_b	r_A	r_b	r_x	obere Schranke oS für r_x	$\|r_x/oS\|$
s_m	0					
0	s_m					

wobei $s_m = \min(10^{-3}, \texttt{smax})/2$. Wie verhält sich der relative Fehler r_x im Vergleich mit der oberen Schranke für verschiedene Störungsarten (letzte Spalte der Tabelle)?

Untersuchen Sie z.B. die Matrizen `Laplace(50)`, `Lehmer(20)`, `Pascal(10)`, `Hilbert(5)`.

Zusatz: Ergänzen Sie in der Tabelle eine Zeile, in der sowohl die Matrix als auch die rechte Seite z.B. mit $s_A = s_b = s_m$ gestört werden (hier ist der Wert von `rhs` beliebig).