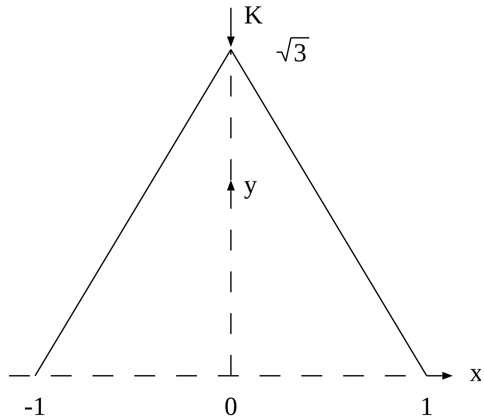
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Numerik–Labor

Nichtlineare Gleichungen — Startwerte

Bei vielen nichtlinearen Gleichungssystemen aus der Praxis ist es nicht leicht, Startwerte zu finden. Häufig liegt jedoch eine Situation vor, in der das Gleichungssystem von einem Parameter abhängt. Wir wollen dies an einem Mini–Stabwerk studieren.

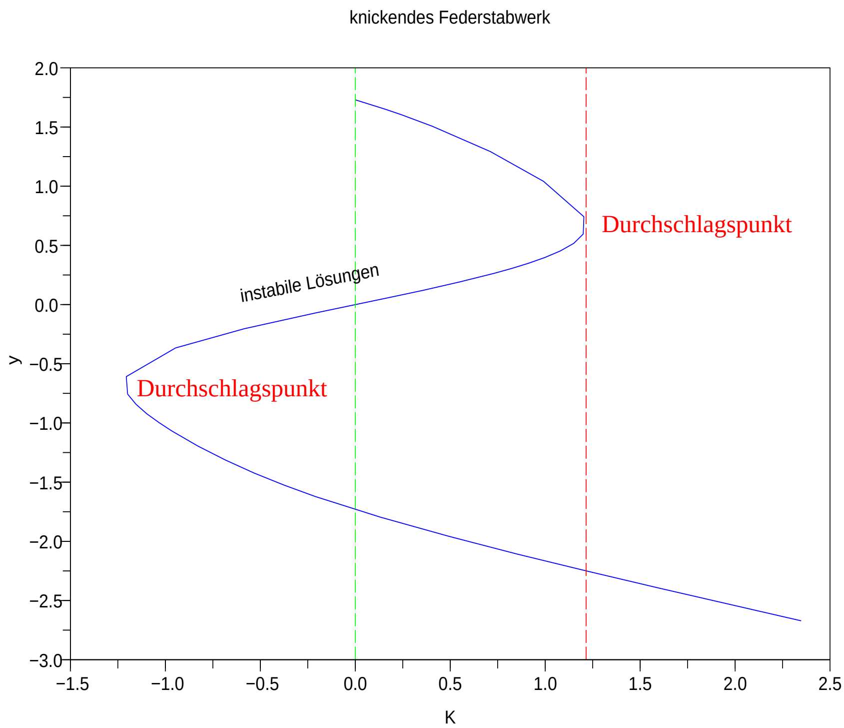
Dieses bestehe aus zwei elastischen aber nicht biegsamen Balken der Länge 2, bei dem der linke Balken eine doppelt so große Federkonstante hat wie der rechte Balken; dies führt auf das folgende Gleichungssystem:



$$(S) \qquad \begin{aligned} 2\,(1+x)\,d^{+} \;-\; (1-x)\,d^{-} &= 0 \\ y \cdot (2\,d^{+} + d^{-}) &= K \end{aligned}$$

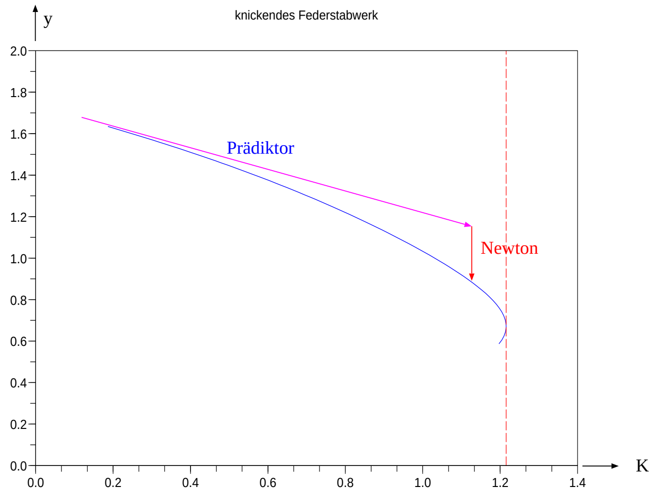
$$\text{mit} \quad d^{\pm} := \frac{2}{\sqrt{y^2 \,+\, (1 \pm x)^2}} - 1$$

Erhöht man die Kraft K langsam, so werden die Stäbe zusammengedrückt, bis — bei einer kritischen Kraft — die Konstruktion “durchschlägt”.



In der “Nähe” der kritischen Kraft ist es sehr schwer, einen geeigneten Startwert zur Berechnung der Gleichgewichtslage der beiden Stäbe (mit der Kraft) zu finden. Ausgehend von einer trivialen Aufgabe (hier bei der Kraft 0) erhöht man die Kraft (allgemeiner einen Parameter in der Funktion) in kleinen Schritten und löst jeweils das Nullstellenproblem. Im einfachsten Falle benutzt man die bisherige Lösung als Startwert für die gesuchte Lösung zum neuen Parameterwert.

Eine bessere Lösung — insbesondere bei schwierigen Problemen — benutzt einen Prädiktor entlang der Tangente der Kurve



Wir betrachten dazu das allgemeine Problem

$$f(u, \lambda) = 0$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert lokal eine Kurve $u(\lambda)$ mit $f(u(\lambda), \lambda)) = 0$, falls f differenzierbar ist, und die Ableitung nach dem ersten Argument eine invertierbare Matrix ist. Differenziert man diese Gleichung nach λ, so erhält man

$$(\star) \qquad \frac{\partial f(u,\lambda)}{\partial u}\,\delta u \;+\; \frac{\partial f(u,\lambda)}{\partial \lambda}\,\delta\lambda \;\approx\; 0$$

Damit lässt sich die Änderung δu bei Änderung von λ um $\delta\lambda$ approximativ aus

$$(\star\star) \qquad J\,\delta u \;=\; -\,\frac{\partial f(u,\lambda)}{\partial \lambda}\,\delta\lambda$$

bestimmen; dabei ist J die schon im Newton–Verfahren benutzte Jacobi–Matrix(bzgl. u) der Funktion f an der Stelle (u, λ) .

Für unseren Parameter $K{=}0$ erhält man die (Start–)Lösung $x{=}0,\ y{=}1.73$. Berechnen Sie jeweils für $K = 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.0,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.21,\ 1.215$ den Prädiktor und mit wenigen Newton–Schritten eine approximative Lösung. Wie lauten die Koordinaten des Gelenks, das die beiden Stäbe verbindet, bei der Kraft $K = 1.215$?

Wir stellen Ihnen die Funktion `Stab(u,K)` mit `u=[x,y]'`, die der Gleichung (S) entspricht (K ist jedoch auf der linken Seite des Gleichheitszeichen) samt ihrer Jacobimatrix (nach u) in der Funktion `Stab_Jac(u)` in der Datei `Stab.sci` , die Sie von der Webseite
`http://www.igpm.rwth-aachen.de/Numa/NumaMB/labor.html`
herunterladen können.

1 Tipps zur Aufgabe

1. Überlegen sie sich:
   - Was ist hier der Parameter, der im Satz über implizite Funktionen λ genannt wird?
   - Was sind die Startwerte?
   - Wie sieht $\frac{\partial f(u,\lambda)}{\partial \lambda}$ aus?
2. Berechnen Sie $u = u + \delta u$ in einer geegneten Schleife, so dass K die obigen Werte annimmt.
3. Es sollen nun maximal 10 Newton-Schritte berechnet werden. Soblad $\|\delta u\|_2$ kleiner als 10^{-6} ist, soll die Iteration abgebrochen werden.
4. Ist $\|\delta u\|_2$ nach den zehn Schritten immernoch größer als 10^{-6}, sollen die Meldung „Newton konvergiert nicht “und der aktuelle Wert von K ausgegeben werden
5. Erstellen sie eine Tabelle, die für alle Werte von K die Position des Verbindugsstücks erfasst.