

## Laborübung 7: Gewöhnliche Differentialgleichungen

### Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t)) \quad \text{mit } t \in [0, T] \quad (1)$$

mit dem Anfangswert

$$u(0) = u_0 \quad u_0 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Die Funktion  $f$  auf der rechten Seite der Differentialgleichung wählen wir als eine der folgenden Möglichkeiten:

$$f_1(t, u) = \cos(t) \quad (3)$$

$$f_2(t, u) = u \quad (4)$$

$$f_3(t, u) = -tu \quad (5)$$

Die zu  $f_3$  gehörende exakte Lösung ist  $u(t) = u_0 e^{-\frac{1}{2}t^2}$ .

**Aufgabe 1:** Finden Sie die exakten Lösungen zu  $f_1$  und  $f_2$ .

### Numerische Lösung

**Aufgabe 2:** Lesen Sie in der Hilfe von Scilab nach, wie das Kommando `ode` verwendet werden kann, um eine Differentialgleichung numerisch zu lösen.

**Aufgabe 3:** Plotten Sie die exakte Lösung sowie die numerische Lösung von Scilab, jeweils für  $f_1, f_2, f_3$ . Wählen Sie selbst Anfangswert, Endzeitpunkt  $T$  sowie Zeitschrittweite.

Wir möchten zusätzlich noch selbst das explizite Eulerverfahren implementieren. Es lautet

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n, u_n)$$

wobei  $t_n = n\Delta t$  und  $u_n$  eine Approximation an  $u(t_n)$  ist.

**Aufgabe 4:** Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der exakten und der Scilab Lösung.

Zusätzlich wollen wir noch das verbesserte Eulerverfahren implementieren. Es lautet

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, u_n)$$
$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, u_{n+\frac{1}{2}})$$

**Aufgabe 5:** Implementieren Sie das verbesserte Eulerverfahren und vergleichen Sie.